МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЭКОНОМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс
(для заочной формы обучения)

Второе издание

Новосибирск
2005

ББК 22.1я73
В 93

Авторы
Канд. физ.-мат. наук Ю.Н. Владимиров, канд. физ.-мат. наук С.Е. Гвоздев,
канд. физ.-мат. наук Е.Е. Каленкович, Л.С. Колодко,
В.М. Саранин, канд. физ.-мат. наук В.Р. Смилянский, И.В. Фролова,
канд. физ.-мат. наук Ю.А. Чиркунов, К.В. Шитов.

Научный руководитель Л.С. Колодко
Ответственный редактор И.В. Фролова

В 93 Высшая математика: Учебно-методический комплекс. – 2-е изд., доп. и перераб. – Новосибирск: НГУЭУ, 2005. – 163 с.

Учебно-методический комплекс подготовлен преподавателями кафедры высшей математики Новосибирского государственного университета экономики и управления и предназначен для студентов-заочников всех специальностей, обучающихся по обычной и ускоренной программам.

Пособие содержит необходимый минимум лекционного материала и написано с учетом реальных возможностей студента-заочника университета по самостоятельному усвоению материала. В книге приводится большое число подробно разобранных примеров решения основных (типовых) задач по высшей математике. Примеры подобраны таким образом, чтобы студент мог опереться на иллюстрируемые способы решения задач при выполнении заочной контрольной работы по дисциплине «Высшая математика».

ББК22.1я73

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Программа составлена в соответствии
с государственными образовательными стандартами
высшего профессионального образования по всем
экономическим специальностям и направлениям

Раздел 1. ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЙ

1.1. ВЫПИСКА ИЗ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА

Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: *N*-мерное линейное векторное пространство; операции над векторами и матрицами; евклидово пространство; системы векторов, ранг матрицы; системы линейных алгебраических уравнений; определители и их свойства; линейные операторы, собственные значения и собственные векторы; комплексные числа и многочлены; прямые и плоскости в аффинном пространстве; выпуклые множества и их свойства; системы линейных неравенств; *математический анализ и дифференциальные уравнения*: понятие множества; операции над множествами; понятие окрестности точки; функциональная зависимость; графики основных элементарных функций; предел последовательности и его свойства; предел и непрерывность функции; глобальные свойства непрерывных функций; производная и дифференциал; основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения; выпуклость функции; точечные множества в N-мерном пространстве; функции нескольких переменных, их непрерывность; производные и дифференциалы функций нескольких переменных; квадратичные формы; экстремумы функций нескольких переменных; неопределенный и определенный интегралы; несобственные интегралы; числовые и степенные ряды; дифференциальные уравнения первого порядка; линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

1.2 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Значение математической подготовки в становлении современного человека определяет следующие **общие цели** математического образования:

– овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования;

– интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых человеку для полноценной жизни в обществе;

– формирование представлений об идеях и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности;

– формирование представлений о значимости математики как части общечеловеческой культуры в развитии цивилизации и в современном обществе.

1.3. ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

По окончании изучения дисциплины ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА слушатель должен:

– **иметь представление** о месте и роли математики в современном мире, о математическом мышлении, принципах математических рассуждений, об основных сферах применения изучаемых разделов высшей математики;

– **знать** основные понятия линейной алгебры и аналитической геометрии, числовых и степенных рядов, методы математического анализа, методы решения простейших дифференциальных уравнений;

– **уметь** использовать методы дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, линейной алгебры при анализе простейших математических моделей экономических процессов, а также обобщать и интерпретировать полученные результаты.

1.4. ФОРМЫ КОНТРОЛЯ

Итоговый контроль. Для контроля усвоения данной дисциплины учебным планом предусмотрен экзамен в конце семестра.

Текущий контроль. В течение семестра предусмотрено выполнение контрольной работы и ее защита. Результат выполнения работы является основанием для выставления оценок текущего контроля. Выполнение работы является обязательным для всех студентов.

Раздел 2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование Разделов и тем	Для студентов на базе среднего общего образования				Для студентов на базе среднего специального образования			
	Количество часов							
	Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа	Всего	Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа	Всего
Раздел 1. **Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии**								
Тема 1.1. Элементы теории множеств								
Тема 1.2. Элементы аналитической геометрии	2		50	52	2		50	52
Тема 1.3. Линейная алгебра	2		52	56	2		54	56
Итого по разделу	4		104	108	4		104	108
Раздел 2. **Математический анализ и дифференциальные уравнения**								
Тема 2.1. Введение в анализ	4		22	24	2		22	24
Тема 2.2. Дифференциальное исчисление	4		70	72	3		70	72
Тема 2.3. Интегральное исчисление	4		38	40	3		38	40
Тема 2.4. Ряды	4		19	20	2		19	20
Тема 2.5. Дифференциальные уравнения	4		7	8	2		7	8
Итого по разделу:	20		156	164	12		156	164
Итого по дисциплине	24		260	272	16		260	272

2.2. СОДЕРЖАНИЕ ОТДЕЛЬНЫХ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ

Раздел 1. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии

Тема 1.1. Элементы теории множеств

Понятие множества. Способы задания множеств. Операции над множествами. Числовые множества и их свойства. Множества натуральных, целых, вещественных чисел. Комплексные числа и многочлены.

Тема 1.2. Элементы аналитической геометрии

Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Векторы на плоскости и в пространстве, линейные операции над векторами и их свойства. Разложение вектора по ортам. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов. Признаки коллинеарности, ортогональности, компланарности векторов. Деление отрезка в данном отношении.

Уравнения линий и поверхностей. Уравнения прямых на плоскости, прямых и плоскостей в пространстве, их виды. Взаимное расположение прямых и плоскостей: углы между ними, условия параллельности и перпендикулярности. Полуплоскости и полупространства. Линейные неравенства, системы неравенств, их геометрический смысл. Выпуклые множества и их свойства.

Тема 1.3. Линейная алгебра

Пространство R^n и его подпространства. Системы векторов. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Теорема Стейница. Базис и размерность подпространства пространства R^n, базис и ранг системы векторов. Обыкновенные жордановы исключения (ОЖИ). Матрицы, операции над матрицами: сумма, умножение матрицы на скаляр, умножение матриц, транспонирование. Обратная матрица. Определение, свойства, критерий существования, методы вычисления. Ранг матрицы, его вычисление методом ОЖИ. Элементарные преобразования матриц. Определители и их свойства. Вычисление определителей. Системы линейных уравнений (СЛУ). Формы записи, совместность, определенность. Системы с квадратной невырожденной матрицей и методы их решения: правило Крамера и матричный метод. Общие системы линейных уравнений. Критерий совместности. Однородные СЛУ. Пространство решений, базисные и свободные переменные. Фундаментальная система решений. Общее решение. Неоднородные СЛУ. Базисное и общее решение. Исследование и решение СЛУ методами ОЖИ и Гаусса. Линейные операторы. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов.

Раздел 2. Математический анализ и дифференциальные уравнения

Тема 2.1. Введение в анализ

Функции и последовательности. Определение функции и последовательности. Способы задания. Классификация функций. Монотонность. Обратная функция. Графики основных элементарных функций.

Предел последовательности и его свойства. Окрестности точек расширенной числовой прямой. Определение предела функции. Односторонние пределы. Свойства пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентность бесконечно малых. Первый и второй замечательные пределы.

Непрерывность функций. Определение непрерывности в точке. Односторонняя непрерывность. Основные свойства непрерывных функций. Непрерывность основных элементарных функций. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Тема 2.2. Дифференциальное исчисление

Определение производной. Геометрический смысл, уравнения касательной и нормали. Дифференцируемые функции. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Связь с производной. Правила дифференцирования. Производная сложной функции. Производная обратной функции, неявной и параметрически заданной. Логарифмическая производная. Таблица производных. Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы о среднем. Правила Лопиталя. Исследование функций: признак монотонности, достаточные условия экстремумов, промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба, вертикальные и наклонные асимптоты. Общая схема исследования функции одной переменной.

Функции нескольких вещественных переменных. Понятие функции нескольких переменных. Квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные и частные дифференциалы. Полный дифференциал. Производная по направлению и градиент функции нескольких переменных. Частные производные высших порядков. Второй дифференциал. Экстремумы функции нескольких переменных.

Тема 2.3. Неопределенный и определенный интегралы

Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства. Таблица основных интегралов. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, подведение под знак дифференциала, замена переменной, интегрирование по частям, интегрирование рациональных дробей, тригонометрических и иррациональных функций.

Определенный интеграл. Определение, геометрический смысл, свойства. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Вычисление площадей плоских фигур. Несобственные интегралы. Приближенное вычисление определенных интегралов.

Тема 2.4. Ряды

Числовые ряды. Понятие числового ряда и его сходимости. Необходимое условие сходимости. Признаки сходимости положительных рядов: сравнения, Даламбера, Коши, интегральный. Абсолютная и условная сходимость произвольных числовых рядов. Признак Лейбница. Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости. Ряд Тейлора (Маклорена).

Тема 2.5. Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения первого порядка. Определение дифференциального уравнения первого порядка. Общее и частное решения уравнения. Линейные дифференциальные уравнения.

Раздел 3. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

I. Введение в теорию множеств. Множества. Способы задания множеств. Операции над множествами. Свойства операций. Множества натуральных, целых, вещественных, комплексных чисел и их свойства.

II. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

1. Векторы на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами. Орты. Разложение вектора по ортам. Координаты вектора.
2. Скалярное произведение векторов. Длина вектора. Угол между векторами. Условия перпендикулярности векторов.
3. Векторное произведение векторов. Геометрический смысл. Вычисление векторного произведения. Условия коллинеарности векторов.
4. Смешанное произведение трех векторов. Геометрический смысл. Вычисление смешанного произведения. Условие компланарности векторов.
5. Деление отрезка в отношении λ.
6. Прямая на плоскости и в пространстве: векторное параметрическое, параметрические, канонические уравнения. Уравнения прямой, проходящей через две точки. Угол между прямыми.
7. Прямая на плоскости как линия первого порядка: векторное уравнение прямой, общее уравнение и геометрический смысл его коэффициентов, уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение прямой, проведенной через точку перпендикулярную заданному вектору, уравнение прямой с угловым коэффициентом. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
8. Плоскость как поверхность первого порядка: векторное уравнение плоскости, общее уравнение и геометрический смысл его коэффициентов, уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
9. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Уравнения прямой и плоскости в отрезках.
10. Полупространства и полуплоскости. Формулы расстояния от точки до плоскости и от точки до прямой на плоскости.
11. Выпуклые множества и их свойства.
12. Элементы аналитической геометрии в R^n. Ось, прямая, гиперплоскость, отрезок. Две теоремы о гиперплоскости.
13. Гиперплоскости и полупространства в R^n. Теорема о разбиении R^n гиперплоскостью на два полупространства R_+^n и R_-^n. Системы линейных неравенств.
14. Пространство R^n и его подпространства. Примеры подпространств.

15. Линейная комбинация системы векторов. Линейная оболочка системы векторов. Теоремы о линейных оболочках. Линейная оболочка системы векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots \overline{e_n}$.
16. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Критерий линейной зависимости.
17. Основные утверждения о линейно зависимых системах (с доказательством).
18. Теорема о замене и ее следствия.
19. Определение базиса подпространства пространства R^n. Свойства базисов. Базисы пространства R^n. Координаты вектора в данном базисе. Их единственность.
20. Размерность подпространства. Свойства. Размерность пространства R^n.
21. Базис и ранг системы векторов. Их свойства.
22. Обыкновенные жордановы исключения (ОЖИ): жордановы таблицы и их трактовка. Определение одного шага ОЖИ. Алгоритм отыскания базиса системы векторов.
23. Матрицы и действия над ними.
24. Обратная матрица и ее свойства. Критерий существования обратной матрицы. Алгоритм нахождения. Пример.
25. Ранг матрицы. Свойства рангов. Алгоритм нахождения. Пример.
26. Определители и их свойства. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков. Вычисление определителей n-го порядка. Пример.
27. Системы линейных уравнений (СЛУ). Основные понятия и определения. Решение СЛУ с квадратной невырожденной матрицей.
28. Теоремы Кронекера-Капелли и об определенности СЛУ. Алгоритм решения СЛУ с помощью ОЖИ.
29. Однородные СЛУ. Пространство решений.
30. Размерность пространства решений. Фундаментальная система решений и ее построение. Общее решение однородной СЛУ.
31. Базисные и свободные переменные. Базисное решение. Теорема о связи решений неоднородной и соответствующей ей однородной СЛУ. Общее решение неоднородной СЛУ,
32. Метод Гаусса решения СЛУ.
33. Линейные операторы. Собственные значения и собственные векторы.

III. Математический анализ

1. Функции и последовательности. Область определения. Способы задания. Ограниченные функции. Монотонные функции.
2. Окрестности точек числовой прямой. Окрестности точек $\pm\infty$.
3. Определение предела последовательности и функции.
4. Односторонние пределы. Критерий существования предела функции в точке.
5. Теоремы о свойствах пределов: единственность предела; предел константы; арифметические свойства пределов; теорема об ограниченности функции, имеющей конечный предел; теорема о сохранении знака; предельный переход в равенстве и неравенстве; принцип сжатой переменной.
6. Бесконечно малые функции и их свойства. Сравнение бесконечно малых.
7. Бесконечно большие функции. Связь с бесконечно малыми. Виды неопределенностей.
8. Эквивалентные функции и их применение к вычислению пределов. Первый замечательный предел.
9. Вычисление пределов от степеней с переменным основанием и показателем. Виды неопределенностей. Второй замечательный предел.
10. Определение функции непрерывной в точке. Односторонняя непрерывность. Критерий непрерывности функции в точке.
11. Свойства функций непрерывных в точке и на отрезке:
    а) арифметические свойства непрерывных функций;
    б) непрерывность суперпозиции;
    в) Теорема о сохранении знака;
    г) Теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши.
12. Точки разрыва и их классификация.
13. Непрерывность элементарных функций.
14. Определение производной функции в точке. Ее геометрический и физический смысл. Уравнения касательной и нормали.

15. Теорема о связи между непрерывностью функции в точке и существованием производной.
16. Правила вычисления производной от суммы, разности, произведения, частного функций.
17. Производная сложной функции.
18. Дифференцируемые функции. Теорема о связи дифференцируемости с существованием производной.
19. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Свойства дифференциала.
20. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков.
21. Производная обратной функции, параметрический заданной, неявной. Логарифмическая производная.
22. Таблица производных.
23. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши, Дарбу.
24. Правила Лопиталя. Сведение неопределенностей вида $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$, к неопределенностям вида $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.
25. Признак монотонности функции на промежутке.
26. Необходимое условие экстремума функции в точке. Достаточные условия.
27. Промежутки выпуклости функции. Точки перегиба. Необходимое и достаточное условия выпуклости.
28. Асимптоты функции.
29. Общая схема исследования функции.
30. Понятие функции нескольких переменных.
31. Квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
32. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
33. Частные производные и частные дифференциалы. Полный дифференциал. Производная по направлению и градиент функции нескольких переменных.
34. Частные производные высших порядков. Второй дифференциал.
35. Экстремумы функции нескольких переменных.
36. Понятие первообразной функции. Теорема об общем виде первообразной.
37. Неопределенный интеграл. Основные свойства. Таблица интегралов.
38. Формула замены переменной в неопределенном интеграле. Приемы интегрирования: методы подстановки и подведения под знак дифференциала.
39. Интегрирование по частям.
40. Интегрирование рациональных дробей.
41. Определенный интеграл и его геометрический смысл. Необходимое условие интегрируемости функции на отрезке. Достаточное условие интегрируемости. Основные свойства определенного интеграла.
42. Теоремы об интегрировании неравенств.
43. Теоремы о среднем в интегральном исчислении.
44. Интеграл с переменным верхним пределом и его производная. Формула Ньютона-Лейбница.
45. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
46. Несобственный интеграл: интеграл вида $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$. Вычисление площадей плоских фигур.
47. Понятие числового ряда и его сходимости. Необходимое условие сходимости.
48. Признаки сходимости положительных рядов: сравнения, Даламбера, Коши, интегральный.
49. Абсолютная и условная сходимость произвольных числовых рядов. Признак Лейбница.
50. Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости. Ряд Тейлора (Маклорена).
51. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решения уравнения.
52. Линейные дифференциальные уравнения.

3.2. ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Высшая математика: Учебное пособие для студентов заочной формы обучения / Е.Е. Каленкович, В.Ф. Соболев, Ю.Н. Владимиров, Л.С. Колодко, В.Р. Смилянский, К.В. Шитов, Ю.А Чиркунов. – Новосибирск, НГАЭиУ, 1997.
2. *Шипачев В.С.* Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1990.
3. *Шипачев В.С.* Задачник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.

Дополнительная

1. *Владимиров Ю.Н.* Множества, отображения, функции. Учебно-методическое пособие для студентов 1 курса с вариантами индивидуальных заданий. – Новосибирск: НГАЭиУ, 2001.
2. *Владимиров Ю.Н.* Индивидуальные задания по теме «Функции нескольких переменных» и методические указания по их выполнению (для студентов 1 курса). – Новосибирск: АСДГ НКИЦ, 1993.
3. *Каленкович Е.Е.* Аналитическая геометрия. Индивидуальное расчетно-графические задание и методические указания по его выполнению. – Новосибирск: НГАЭиК, 1999.
4. *Каленкович Е.Е.* Интегралы. Индивидуальное расчетно-графическое задание и методические указания по его выполнению. – Новосибирск: НГАЭиУ, 2000.
5. *Иванова Н.В. Колодко Л.С.* Линейная алгебра. Индивидуальное расчетно-графическое задание и методические указания по его выполнению. – Новосибирск: НГАЭиУ, 2000.
6. *Чиркунов Ю.А.* Исследование функций и построение их графиков. Индивидуальное расчетно-графическое задание и методические указания по его выполнению. – Новосибирск: НГАЭиУ, 2000.
7. *Владимиров* Ю.Н. Математический анализ функций одной вещественной переменной (краткий справочник). – Новосибирск, 1998.
8. *Владимиров Ю.Н.* Аналитическая геометрия (краткий справочник). – Новосибирск: Новосибирская государственная академия экономики и управления, 2001.
9. *Владимиров Ю.Н.* Линейная алгебра (краткий справочник). – Новосибирск: НГАЭиУ, 2001.
10. *Колодко Л.С.* Линейная алгебра. Методическая разработка для студентов 1 курса очной формы обучения экономических специальностей. – Новосибирск: НГАЭиУ, 2001.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

В соответствии с программой курс высшей математики содержит темы:

– элементы аналитической геометрии;
– линейная алгебра;
– дифференциальное исчисление функций одной переменной;
– функции двух переменных;
– интегральное исчисление;
– ряды;
– дифференциальные уравнения.

Эти темы располагаются в курсе лекций в УМК именно в указанном порядке, поскольку каждая последующая тема основана на понимании некоторых сведений из предыдущих. Аналогичная зависимость существует и в порядке изложения каждой темы. Так, аналитическая геометрия основана на методе декартовых координат и векторной алгебре. Аналитическая геометрия изучает, в основном, линейные объекты на плоскости и в пространстве, для которых точки, векторы имеют не более трех координат.

Линейная алгебра имеет дело с объектами, зависящими от любого конечного числа измерений (координат). Таким образом, некоторые понятия аналитической геометрии для линейной алгебры являются частным случаем и служат наглядной иллюстрацией более общих понятий.

Следующие темы относятся к области математического анализа (анализа бесконечно малых). В первой теме изучаются свойства функций одной вещественной переменной. В процессе исследования функций привлекаются некоторые прямые (касательные к графику функции, асимптоты), уравнения которых вводятся в курсе аналитической геометрии.

Далее следует тема «Функции двух переменных». С одной стороны, здесь используются основные понятия предыдущей темы. С другой стороны, имеются существенные различия анализа функций одной и двух переменных. Более того, нет особого отличия анализа функций двух и $n > 2$ переменных, а ограничения двумя переменными связано с большей наглядностью и доступностью изложения и усвоения материала. Завершаются эти две темы решением задач на экстремум (минимум и максимум), имеющих большое практическое применение.

Интегрирование функций одной переменной является действием, обратным дифференцированию. Как обычно, в математике решение обратных задач гораздо сложнее. В лекциях описываются основные методы интегрирования, связь неопределенного и определенного интегралов. При решении задач (вычислении интегралов) нужно помнить не только таблицу основных интегралов, но и таблицу производных (дифференциалов), так как часто приходится отвечать на вопрос: от какой функции некоторая часть подынтегральной функции является производной.

Следующая тема – «Ряды» (числовые, степенные). Ряды являются обобщением обычных сумм и многочленов на бесконечное число слагаемых. Для изучения рядов используется частный случай функций: функций натурального аргумента – последовательностей – и их пределов при $n \to \infty$, понятие о которых дается в курсе дифференциального исчисления. Введение рядов позволяет изучать функции, не являющиеся элементарными, находить интегралы, которые невозможно вычислить методами, описанными в курсе интегрального исчисления. В дальнейшем ряды находят применение в курсе теории вероятностей.

Последняя тема курса – «Дифференциальные уравнения». Рассматриваются только так называемые обыкновенные дифференциальные уравнения (для функций одной вещественной переменной). Если в предыдущих темах математического анализа изучаются поведение функций и свойства при заданной зависимости функции от аргумента (обычно аналитической, то есть в виде формулы $y = f(x)$), то в этой теме рассматривается функциональная зависимость, связывающая аргумент, саму функцию y и некоторые ее производные (y', y''). Исходя из этой зависимости следует восстановить саму функцию $y = f(\text{x})$. Методы решения основаны на установлении связи между дифференциалами функции и аргумента, а затем интегрировании полученного уравнения.

Описанные выше связи между темами указывают на необходимый порядок их изучения.

Как показывает практика, курс математики для большинства студентов-заочников является довольно сложным. Именно поэтому изучать математику следует не «наскоком» перед сессией, а регулярно с начала учебного года.

Рекомендации

Темы курса следует изучать в той последовательности, в какой они приведены в лекциях.

При изучении каждой темы следует

– внимательно прочитать текст лекции (раздела);

– разобрать приведенные в лекции примеры решения задач;

– ответить на контрольные вопросы теоретического характера;

– решить практические задания, добиваясь совпадения с приведенными ответами.

Изучение каждой темы завершается выполнением соответствующего задания из контрольной работы.

Перед изучением курса математического анализа следует хотя бы на справочном уровне восстановить знания из школьного курса алгебры и тригонометрии (основные элементарные функции и их графики, формулы сокращенного умножения, решения квадратных уравнений, определения и свойства тригонометрических функций, соотношения между ними и т.д.).

Контрольные работы должны отсылаться в институт *заблаговременно*, так как при неудачном выполнении они могут быть не зачтены. В этом случае преподаватель пишет резюме, где указывает на имеющиеся ошибки, и работа возвращается студенту на *доработку*. Доработка должна быть оформлена как «*Работа над ошибками*» (а не решение всех задач заново), выполняться *в той же тетради* и *вместе с предыдущим вариантом* и резюме преподавателя на него отсылаться в институт.

При несвоевременном выполнении контрольной работы или ее доработки студент *не допускается к экзамену*.

При последовательном и добросовестном изучении курса высшей математики, своевременном и *самостоятельном* выполнении контрольных работ, подготовка к экзамену будет заключаться просто в повторении и закреплении пройденного материала.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Лекции по дисциплине

Раздел 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ТЕМА 1.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1.1. Основные понятия

В математике первичными понятиями являются понятия множества, элемента и принадлежности элемента множеству. *Множество* — это совокупность элементов, объединенных общим (характеристическим) свойством.

Обозначения:

A, B, C, ..., X, Y, Z – множества; a, b, c,..., x, y, z – элементы множеств;

$x \in A$ обозначает принадлежность элемента x множеству A;

$x \notin A$ – x не принадлежит множеству A;

$\Rightarrow$ – следовательно, если … то;

$\Leftrightarrow$ – тогда и только тогда, необходимо и достаточно;

$\forall$– любой, каждый;

$\exists$– существует.

Способы задания множеств.

– Перечислением элементов. Например, $X=\{1, 2\}$ – множество X состоит из двух элементов: 1 и 2.

– Указанием характеристического свойства. Например, $X=\{x: (x-1)(x+3)=0\}$ – это множество содержит два элемента – корни уравнения $(x-1)(x+3)=0$, то есть числа 1 и –3.

$A=\{(\lambda_1, \dots , \lambda_n): \lambda_1^2+\lambda_2^2+ \dots + \lambda_n^2 = 0\}$

такое множество содержит единственный набор чисел, состоящий из n нулей, т.е.

$A=\{(0, 0, \dots , 0)\}$.

Введем понятия пустого множества $\varnothing$ и универсального множества U. *Пустое* множество – это множество, не содержащее ни одного элемента.

$\forall x \ x \in \varnothing$.

Универсальное множество – это множество, содержащее все элементы.

$\forall x \ x \in U$.

ПРИМЕР. $\{x \in R: x^2<0\} = \varnothing$. $\{x \in R: x^2 \geq 0\}=R=\mathrm{U}$.

Во втором примере множество вещественных чисел R играет роль универсального множества.

Рассмотрим понятия подмножества и равенства множеств.

Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B: $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Очевидно, что $\varnothing \subset A$, $A \subset A$, $A \subset U$ для любого множества A.

Множества A и B называются *равными*, если каждый элемент множества A является элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A: $A=B \Leftrightarrow A \subset B$ и $B \subset A$.

1.1.2. Операции над множествами

Объединением $A \cup B$ двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, содержащихся либо в A, либо в B.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ или } x \in B; \quad x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ и } x \notin B.$$

Пересечением $A \cap B$ двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, содержащихся и в A, и в B.

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \in B; \quad x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ или } x \notin B.$$

Разностью $A \backslash B$ множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.

$$X \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \notin B; \quad x \notin A \backslash B \Leftrightarrow x \notin A \text{ или } x \in B.$$

Разность $U \backslash A$ называется *дополнением* множества A и обозначается $\overline{A}$.

$X\in \overline{A} \Leftrightarrow x\notin A$; $x\notin \overline{A} \Leftrightarrow x\in A$.

Свойства операций.

1. $A\cup B=B\cup A$
2. $A\cap B=B\cap A$
3. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
4. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
5. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
6. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
7. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
8. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
9. $A\backslash B=A\cap\overline{B}$
10. $A\cup A=A\cap A=A$
11. $A\cup\varnothing=A$; $A\cap\varnothing=\varnothing$
12. $A\cup U=U$; $A\cap U=A$
13. $A\cup\overline{A}=U$; $A\cap\overline{A}=\varnothing$
14. $\overline{\overline{A}}=A$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО свойства 6. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Возьмем $x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow x\in A$ и $x\in B\cup C\Rightarrow x\in A$ и ($x\in B$ или $x\in C$)$\Rightarrow$($x\in A$ и $x\in B$) или ($x\in A$ и $x\in C$)$\Rightarrow x\in A\cap B$ или $x\in A\cap C$)$\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Доказано, что $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Воэьмем $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\in x\in A\cap B$ или $x\in A\cap C\Rightarrow$($x\in A$ и $x\in B$) или ($x\in A$ и $x\in C$)$\Rightarrow x\in A$ и ($x\in B$ или $x\in C$)$\Rightarrow x\in A$ и $x\in B\cup C\Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)$. Доказано, что $A\cap(B\cup C)\supset(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Тождество доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО свойства 13. $A\cup\overline{A}=U$; $A\cap\overline{A}=\varnothing$.

$A\cup\overline{A}=U$.

$A\cup\overline{A}\supset U$ –очевидно, так как U –универсальное множество. Докажем, что $A\cup\overline{A}\supset U$.

Возьмем $x\in U\Rightarrow x\in A$ или $x\notin A\Rightarrow x\in A$ или $x\in\overline{A}\Rightarrow x\in A\cup\overline{A}\Rightarrow U\subset A\cup\overline{A}$. Тождество доказано.

$A\cap\overline{A}=\varnothing$. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Предположим противное, что $A\cap\overline{A}\neq\varnothing$. Тогда существует $x\in A\cap\overline{A}\Rightarrow x\in A$ и $x\in\overline{A}\Rightarrow x\in A$ и $x\notin A$. Получили противоречие. Следовательно, предположение $A\cap\overline{A}\neq\varnothing$ неверно и $A\cap\overline{A}=\varnothing$.

Контрольные вопросы

1. Что понимается под словом «множество»?
2. Перечислить способы задания множеств.
3. Какие множества называют равными?
4. Перечислить операции над множествами.

Основная литература по теме

1. *Шипачев В.С.* Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1990. – гл.1. – п. 1.
2. *Шипачев В.С.* Задачник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000. – гл. 1. – п. 1.

ТЕМА 1.2. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1.2.1. Прямоугольные декартовы координаты на плоскости. Уравнение линии на плоскости

Возьмем произвольную прямую, выберем и отметим на ней стрелкой направление. Зададим на этой прямой масштабную единицу для измерения длин отрезков (рис.1). Такая прямая называется *осью*.

Рис. 1

Отметим на оси две произвольные точки A и B (рис. 2). Отрезок с началом в точке A и концом в точке B называется *направленным* с направлением от A к B и обозначается $\overline{AB}$. Его длина (модуль) обозначается $\left|\overline{AB}\right|$.

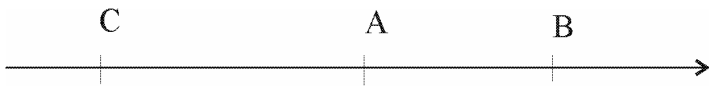


Рис. 2

Величиной AB направленного отрезка $\left|\overline{AB}\right|$ называется число, равное $\left|\overline{AB}\right|$, если направления оси и отрезка совпадают, и число $-\left|\overline{AB}\right|$, если эти направления противоположны. На рис. 2 $AB = \left|\overline{AB}\right|$, $AC = -\left|\overline{AC}\right|$.

Выберем на оси некоторую точку O – начало координат. Такая ось называется *координатной прямой*. Поставим в соответствие каждой точке M число $x=OM$ (рис. 3). Число x называется *координатой* точки M. Взаимно однозначное соответствие точек координатной прямой M и их координат x обозначается символом $M(x)$.

Рис. 3

Возьмем на координатной прямой две произвольные точки $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ (рис.4). Величина направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ равна $M_1M_2 = x_1 - x_2$, а его длина $\left|\overline{M_1M_2}\right| = \left|x_1 - x_2\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$.

Рис. 4

Две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy с общим началом координат O и одинаковой масштабной единицей составляют *прямоугольную (декартову) систему координат на плоскости Oxy*. Эти оси называются *осями координат*, ось Ox – *осью абсцисс*, ось Oy – *осью ординат.*

Возьмем произвольную точку M на плоскости Oxy и опустим из нее перпендикуляры MA и MB на оси Ox и Oy. Величины OA и OB направленных отрезков $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ называются *координатами* точки M: $x=OA$, $y=OB$ (рис.5).

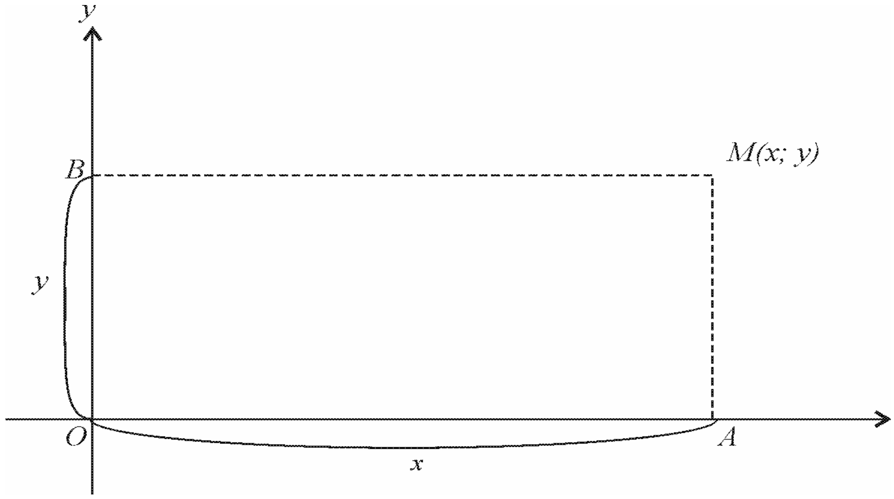


Рис. 5

Координаты *x, y* точки *M* соответственно называются ее *абсциссой* и *ординатой*.. Взаимно однозначное соответствие точек *M* на плоскости и упорядоченных пар вещественных чисел (*x*; *y*) – их координат – обозначается символом *M*(*x*; *y*). Начало координат *O* имеет координаты (0; 0).

Расстояние *d* между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

Пусть точка *M* (*x*; *y*) делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$. Тогда координаты точки *M* определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}, \ y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda} \tag{2}$$

В частности, если *M* – середина отрезка, то $\lambda = 1$, откуда следует, что

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{3}$$

Формулы (2) называются формулами *деления отрезка в данном отношении*.

ПРИМЕР 1. Дан треугольник *ABC*: *A*(1; –1), *B*(2; 4), *C*(6; 0). Найти длину медианы *AD* и координаты точки пересечения медиан треугольника.

РЕШЕНИЕ. Сделаем чертеж (рис. 6).

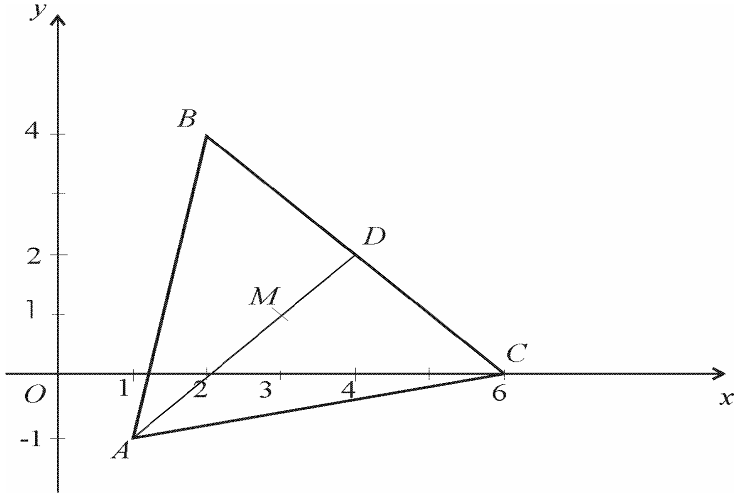


Рис. 6

По формуле (3) координаты основания медианы *AD* равны полусуммам координат вершин *B* и *C*: $x_D = \frac{2+6}{2} = 4$, $y_D = \frac{4+0}{2} = 2$. Длина медианы

$$\left|\overline{AD}\right| = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-1))^2} = 3\sqrt{2}\ .$$

Из курса геометрии известно, что каждая медиана делится точкой их пересечения в отношении 2:1. Тогда координаты искомой точки *M* можно найти по формулам (2) при $\lambda = 2$:

$$x_M = \frac{x_A + 2x_D}{1+2} = \frac{1 + 2\cdot 4}{3} = 3\ ,\ y_M = \frac{y_A + 2y_D}{1+2} = \frac{-1+2\cdot 2}{3} = 1\ .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Уравнение с двумя переменными

$$F(x, y)=0 \tag{4}$$

называется *уравнением линии* (*кривой*) L в данной системе координат, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки линии L и любое решение (*x*; *y*) уравнения (4) является координатами некоторой точки этой линии.

Если заданы два уравнения $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$ линий L_1 и L_2, то множество координат точек их пересечения эквивалентно множеству решений системы уравнений $\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0. \end{cases}$

Найдем уравнение линии, все точки которой находятся на равных расстояниях *R* от начала координат. Возьмем произвольную точку *M*(*x*; *y*) линии – точку с текущими координатами (*x*; *y*). По формуле (1) $R = \sqrt{x^2 + y^2}$. Возводя в квадрат, получим $x^2 + y^2 = R^2$. Из формулировки задачи следует, что это *уравнение окружности* с центром в точке *O* и радиусом *R*.

Если центр окружности находится в точке $O'(a;b)$, то аналогично получим уравнение:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \tag{5}$$

ПРИМЕР 2. Найти уравнение линии, все точки которой находятся вдвое дальше от точки *A*(3;0), чем от точки *B*(–1;3).

РЕШЕНИЕ. Возьмем произвольную точку кривой *M*(*x*; *y*). По условию $\left|\overline{AM}\right| = 2\left|\overline{BM}\right|$ или $AM^2 = 4BM^2$. Используя формулу (1), получим

$$(x-3)^2 + (y-0)^2 = 4[(x+1)^2 + (y-3)^2]\ .$$

Преобразуем это уравнение:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4(x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9)\ ,$$

$$3x^2 + 14x + 3y^2 - 24y + 31 = 0\ .$$

Поскольку коэффициенты при *x* и *y* равны, то это должно быть уравнение окружности вида (5). Поэтому разделим его на 3 и выделим полные квадраты:

$$x^2 + 2\cdot\frac{7}{3}x + \frac{49}{9} + y^2 - 2\cdot 4y + 16 = \frac{49}{9} + 16 - \frac{31}{3},$$

$$\left(x + \frac{7}{3}\right)^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2.$$

Итак, мы получили уравнение окружности с центром в точке $O'\left(-\frac{7}{3};4\right)$ и радиусом $R = \frac{10}{3}$ (рис. 7).

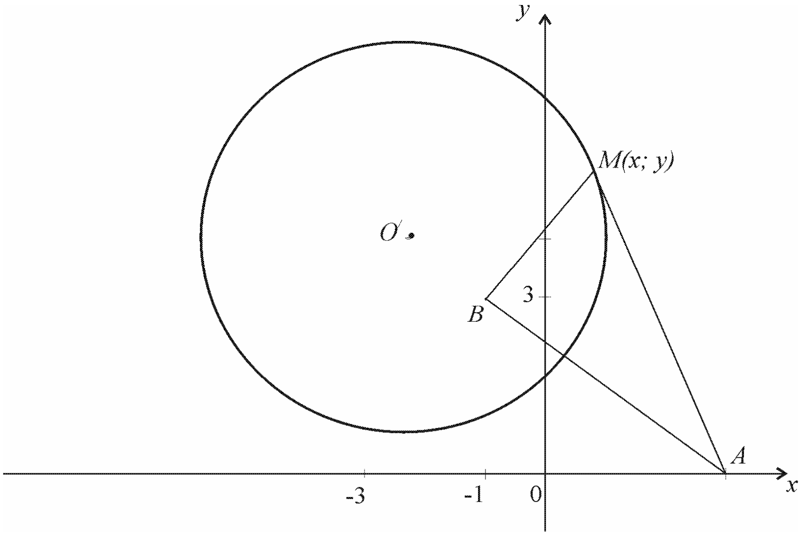


Рис. 7

Контрольные вопросы

1. Какой отрезок на оси называется направленным? Чем отличаются длина (модуль) отрезка и его величина? Что принимают за координату точки: длину или величину отрезка?
2. Как найти длину и величину отрезка на оси, если известны координаты его концов?
3. Определите понятие декартовой системы координат на плоскости.
4. Существует ли понятие: величина отрезка на плоскости, если хотя бы одна из точек – начало или конец его не лежат на осях координат?
5. Напишите формулы длины отрезка M_1M_2: $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ и координат точки *M*, делящей отрезок в отношении $\lambda=\dfrac{M_1M}{MM_2}$.

Тестовые задания

1. λ. Обозначив $t=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$ выведите формулы для *x, y* в зависимости от *t.* В каких пределах меняется *t*?
   ОТВЕТ: $x=(1-t)x_1+tx_2$, $y=(1-t)y_1+ty_2$, $0\le t\le 1$.
2. Что такое уравнение линии на плоскости? Как найти координаты точек пересечения двух линий?
3. Даны точки $A_1(1;1)$, $A_2(-5;6)$. Найти координаты точек B_1, B_2, B_3, делящих отрезок A_1A_2 соответственно в отношениях: $1/3$, 1, 3. Найти соответствующие значения t_1, t_2, t_3 из вопроса 6.
   ОТВЕТ: $B_1(-1/2;9/4), B_2(-2;7/2), B_3(-7/2;19/4)$; $t_1=1/4, t_2=1/2, t_3=3/4$.
4. Дан треугольник *ABC*: *A*(1; 1), *B*(3; 5), *C*(7; -2). Найти длину медианы *CM*.
   ОТВЕТ: $\left|\overline{CM}\right|=2\sqrt{5}$.

1.2.2. Прямоугольные декартовы координаты в пространстве. Уравнение поверхности

Разместим в пространстве координатную плоскость *Oxy* так, чтобы ось ординат *Oy* лежала в плоскости чертежа и была направлена вправо, а ось абсцисс *Ox* была перпендикулярна плоскости чертежа и направлена к читателю. Из точки *O* – начала координат – перпендикулярно *Oxy* вверх проведем ось *Oz* – *ось аппликат*. Если на всех осях взять одинаковую масштабную единицу, то получаем *прямоугольную декартову систему координат в пространстве Oxyz.* Плоскости *Oxy, Oxz, Oyz* называются *координатными плоскостями.*

Пусть *M* – произвольная точка пространства. Проведем через точку *M* три плоскости, перпендикулярные осям координат *Ox, Oy, Oz,* и обозначим точки пересечения этих плоскостей с координатными осями соответственно через *A, B, C* (рис. 8).

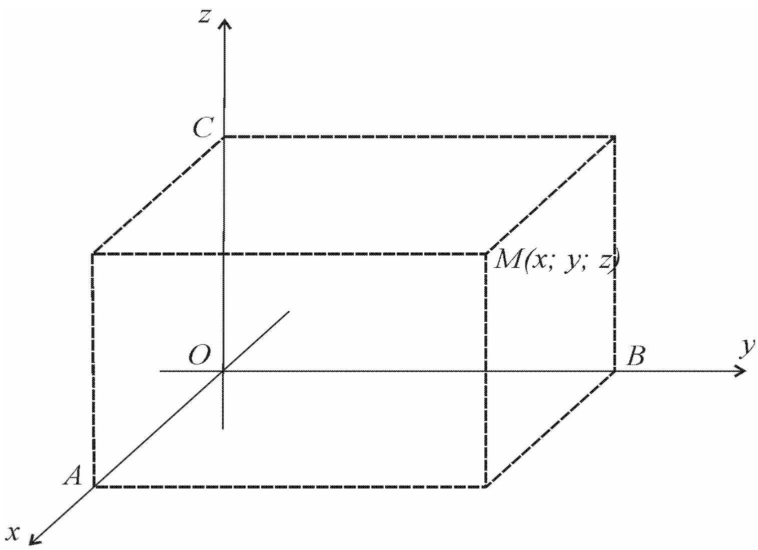


Рис. 8

Величины направленных отрезков *x=OA, y=OB, z=OC* называются *координатами* точки *M*. Координаты *x, y, z* называются соответственно *абсциссой, ординатой* и *аппликатой* точки *M*. Взаимно однозначное соответствие точек пространства *M* и *упорядоченных* троек вещественных чисел (*x*; *y*; *z*) обозначаются символом *M*(*x*; *y*; *z*). Началом координат служит точка $O(0;0;0)$.

Расстояние *d* между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{1}$$

Пусть точка *M*(*x*; *y*; *z*) делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$. Тогда координаты точки *M* определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{2}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Уравнение с тремя переменными

$$F(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

называется *уравнением поверхности S* в данной системе координат, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности S и любое решение (*x*; *y*; *z*) уравнения (3) является координатами некоторой точки этой поверхности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Кривая *Г* в пространстве задается уравнениями системы

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

если координаты любой точки кривой *Г* удовлетворяют этим уравнениям и любое решение (*x*; *y*; *z*) этой системы является координатами некоторой точки этой кривой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество точек пространства называется *сферой*, если эти точки одинаково удалены от заданной точки, называемой *центром сферы*. А расстояние от центра до точек сферы называется ее *радиусом.*

Пусть задан центр сферы *O*(*a*; *b*; *c*) и ее радиус *R*. Применяя формулу (1) для вычисления расстояния между точкой *O* и произвольной точкой сферы *M*(*x*; *y*; *z*) (точкой с *текущими координатами*), получим:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \tag{4}$$

Это и есть уравнение сферы.

ПРИМЕР 1. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y + 4z - 3 = 0$ является уравнением сферы.

РЕШЕНИЕ. Выделим в заданном уравнении полные квадраты:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y + 4z - 3 = \left(x^2 - 2\cdot\frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y^2 + 2\cdot\frac{5}{2}y + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) -$$

$$-\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(z^2 + 2\cdot 2z + 2^2\right) - 2^2 - 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + (z+2)^2 - 16 = 0.$$

Отсюда

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{5}{2}\right)\right)^2 + (z - (-2))^2 = 4^2.$$

Сравнивая с уравнением (4), видим, что это действительно уравнение сферы с центром $O'\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2};-2\right)$ и радиусом $R = 4$.

Контрольные вопросы

1. Сколько координат характеризуют положение точки в пространстве?
2. Как называются координаты точки?
3. Выведите формулы деления отрезка в данном отношении λ, введя параметр $t = \frac{\lambda}{1+\lambda}$.
4. Напишите уравнение поверхности в пространстве.

Тестовые задания

1. Докажите, что уравнение $2x^2 + 4x + 2y^2 + 2z^2 - 8z + 3 = 0$ является уравнением сферы. Найдите ее центр O' и радиус R.
   ОТВЕТ: $O'(-1;0;2)$, $R = \sqrt{7/2}$.

1.2.3. Векторы в пространстве. Линейные операции над векторами

Понятие вектора

Величины, которые полностью определяются заданием численного значения, называются *скалярными* или *скалярами*. Например, объем, масса, зарплата. Для характеристики некоторых других величин требуется задать не только численное значение, но и направление. Такие величины называются векторными[1]. Например, смещение точки в пространстве, действующая на нее сила. Любую из таких величин геометрически можно представить как упорядоченную пару точек А и В, определяющую *направленный отрезок* с началом в точке А и концом в точке В и направлением от первой точки ко второй.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Направленный отрезок называется *вектором*.

Вектор обозначается символами $\overline{AB}$ или $\overline{a}$. Направление указывается стрелкой у конца вектора (рис. 9). Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной (модулем)* и обозначается $\overline{AB}$ или $|\overline{a}|$.

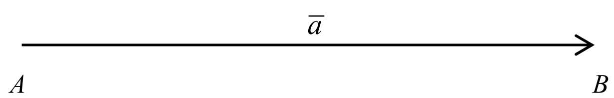


Рис. 9

[1] Вектор [от латинского vector – везущий, несущий.].

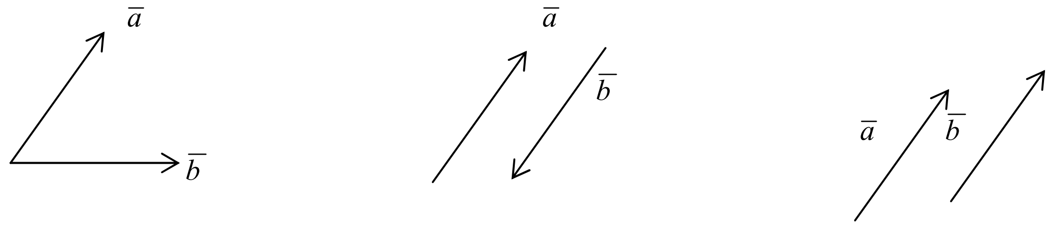
Вектор называется *нулевым,* если его начало совпадает с концом. Нулевой вектор обозначается $\overline{0}$, его длина равна 0, а направление не определено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. **Два** вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются коллинеарными[2], если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. **Три** вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называются компланарными[3], если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *равными* $(\overline{a}=\overline{b})$, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаково направлены.

На рис.10 (*а, б*) изображены неравные, а на рис.10 (*в*) – равные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.



а) *б)* *в)*

Рис. 10

Из определения 4 следует, что для равенства векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ необходимо и достаточно, чтобы при параллельном переносе вектора $\overline{b}$ так, чтобы его начало совпало с началом вектора $\overline{a}$, произошло и совпадение концов векторов. То есть каждый вектор является элементом бесконечного множества равных ему векторов.

Под углом φ между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ понимают угол между векторами, равными данным, если их начала совпадают, причем, $0 \le \varphi \le \pi$ (рис.11).

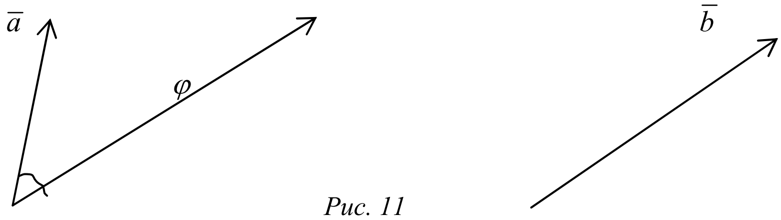


Рис. 11

При $\varphi = 0$ векторы одинаково направлены, при $\varphi = \pi$ – направлены противоположно. При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ векторы называются *ортогональными.*

Проекции вектора на оси

Зададим в пространстве некоторую ось *u* и вектор $\overline{AB}$. Проведем через точки *A* и *B* плоскости, перпендикулярные оси *u*, и обозначим через A' и B' точки пересечения этих плоскостей с осью *u* (рис. 12). *Проекцией* вектора $\overline{AB}$ на ось *u* называется величина вектора $\overline{A'B'}$. Обозначается проекция так: $пр_u \overline{AB}$.

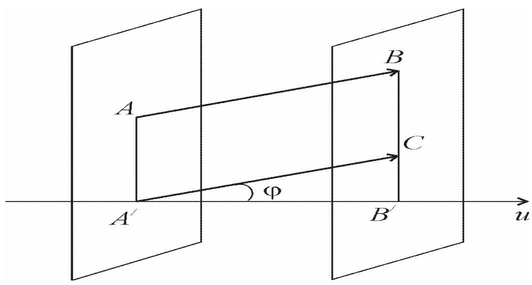


Рис. 12

---

[2] Коллинеарный [от латинского con – вместе + linea – линия].

[3] Компланарный [от латинского con – вместе + plane – плоскость].

ТЕОРЕМА 1. *Проекция вектора* $\overline{AB}$ *на ось и равна длине вектора* $\overline{AB}$*, умноженной на косинус угла* φ *между вектором* $\overline{AB}$ *и осью и, т.е.*

$$np_u\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cdot cos\varphi \tag{1}$$

Пусть в пространстве задана прямоугольная система координат *Oxyz*. Обозначим проекции вектора $\overline{AB}$ на оси координат через $X = np_x\overline{AB}$, $Y = np_y\overline{AB}$, $Z = np_z\overline{AB}$. Эти проекции называются *координатами* вектора. Используются обозначения:

$\overline{AB} = \{X; Y; Z\}$ или $\overline{AB}(X; Y; Z)$.

ТЕОРЕМА 2. *Для любых точек* $A(x_1; y_1; z_1)$ *и* $B(x_2; y_2; z_2)$ *координаты вектора* $\overline{AB}$ *вычисляются по формулам:*

$$X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1,\ Z = z_2 - z_1. \tag{2}$$

Вектор $\overline{OA}$, начало которого совпадает с началом координат, называется *радиус-вектором.* Его координаты совпадают с координатами конца вектора, т.е. $\overline{OA}(x; y; z)$.

ПРИМЕР 1. Найти координаты вектора $\overline{M_1M_2}$, если точки M_1, M_2 имеют координаты: $M_1(0;-3;1), M_2(2;1;-2)$.

РЕШЕНИЕ. По формулам (2) находим:

$X = 2\text{-}0 = 2,\ Y = 1\text{-}(-3) = 4,\ Z = -2\text{-}1 = -3$.

ПРИМЕР 2. Дан вектор $\overline{M_1M_2}(3;-4;2)$ с концом в точке $M_2(-1;2;-2)$. Найти координаты начала вектора $M_1(x_1; y_1; z_1)$.

РЕШЕНИЕ. Из формул (2) следует:

$x_1 = x_2 - X = -1 - 3 = -4$,

$y_1 = y_2 - Y = 2 - (-4) = 6$,

$z_1 = z_2 - Z = -2 - 2 = -4$.

Линейные операции над векторами

Линейными операциями называют операции сложения векторов и умножения векторов на вещественные числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Суммой* $\overline{a} + \overline{b}$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$ при условии, что вектор $\overline{b}$ приложен к концу вектора $\overline{a}$ (рис. 13).

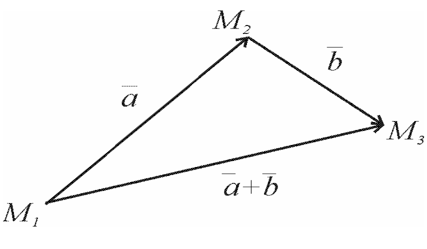


Рис. 13

Правило сложения двух векторов, содержащееся в этом определении, называется *правилом треугольника.*

Обозначим вершины треугольника буквами M_1, M_2, M_3. Получаем векторное соотношение: для любой упорядоченной тройки точек в пространстве справедливо векторное равенство

$$\overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3} = \overline{M_1M_3}.$$

Из определения сложения векторов следует обратное ему действие вычитания.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Разностью* векторов $\overline{b}-\overline{a}$ вектора $\overline{b}$ и вектора $\overline{a}$ называется вектор, который в сумме с вектором $\overline{a}$ дает вектор $\overline{b}$.

Отсюда следует правило построения разности: разность $\overline{b}-\overline{a}$ приведенных к общему началу векторов $\overline{b}$ и $\overline{a}$ представляет собой вектор, идущий из конца вычитаемого $\overline{a}$ в конец уменьшаемого $\overline{b}$ (рис. 14).

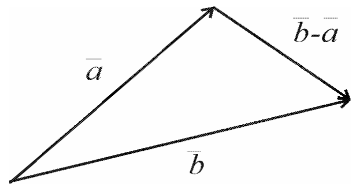


Рис. 14

Пусть даны вектор $\overline{a}\neq 0$ и вещественное число $\alpha\neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Произведением* $\alpha\,\overline{a}\;(\overline{a}\,\alpha)$ называется вектор, коллинеарный $\overline{a}$, имеющий длину $|\alpha|\cdot|\overline{a}|$ и направленный так же, как $\overline{a}$ при $\alpha>0$ и противоположно направленный при $\alpha<0$ (рис. 15).

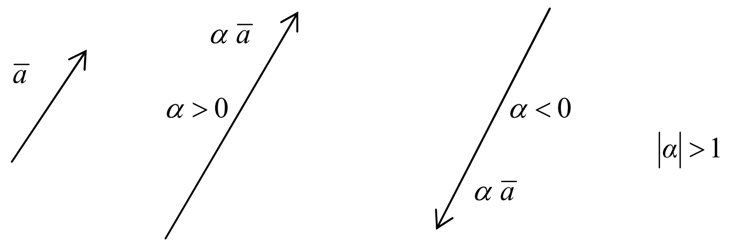


Рис. 15

Если $\alpha=0$ или $\overline{a}=\overline{0}$, то считаем $\alpha\,\overline{a}=\overline{0}$. При $|\alpha|>1$ происходит растяжение вектора $\overline{a}$ в $|\alpha|$ раз, а при $|\alpha|<1$ – сжатие в $\dfrac{1}{|\alpha|}$ раз.

Рассмотрим основные свойства линейных операций.

1. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ (переместительное свойство сложения).

Доказательство ясно из рис. 16. Построим сначала по правилу треугольника векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{a}+\overline{b}$. Теперь совместим начало вектора $\overline{b}$ с началом $\overline{a}$ и добавим к нему вектор $\overline{a}$ по тому же правилу треугольника, т.е. помещая начало $\overline{a}$ в точку *D*. Ясно, что мы получим параллелограмм *ABCD,* в котором векторы $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ изображены диагональю $\overline{AC}$.

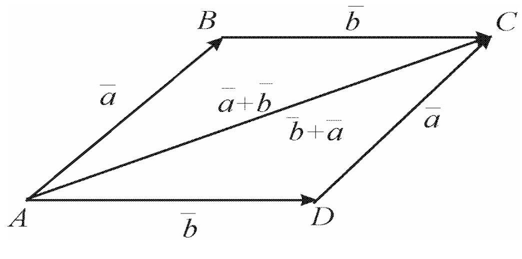


Рис. 16

Отсюда следует известное из физики *правило параллелограмма* сложения векторов. Заметим, что разность векторов является второй диагональю параллелограмма: $\overline{b}-\overline{a}=\overline{BD}$.

2. $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ (сочетательное свойство сложения).

Левая часть равенства представляет собой применение правила (определения) сложения двух векторов к получению суммы трех (а в общем случае любого конечного количества) векторов: сначала получаем вектор суммы первого и второго вектора, а затем добавляем к нему третий вектор (и так далее). Правая часть означает, что порядок вычисления промежуточных сумм можно менять произвольным образом.

3. $\alpha(\beta\overline{\alpha}\,) = (\alpha\beta)\,\overline{a}$.

4. $(\alpha + \beta)\,\overline{a} = \alpha\,\overline{a} + \beta\,\overline{a}$.

5. $\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha\,\overline{a} + \alpha\,\overline{b}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На рис. 17 показано обобщение правила треугольника на сумму любого конечного числа векторов: если расположить векторы в виде звеньев ломаной, то их суммой будет замыкающее звено $\overline{OD}$, исходящее из начала первого вектора $\overline{a}$ в конец последнего вектора $\overline{d}$. Это правило называется *правилом замыкания ломаной до многоугольника.* Если ломаная замкнута, то есть последний добавляемый вектор имеет конец в начале первого вектор, то их сумма равна $\overline{0}$. Например, на рис. 17 это произойдет, если к сумме $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d}$ добавить вектор $\overline{DO}$ – противоположный вектору $\overline{OD}$.

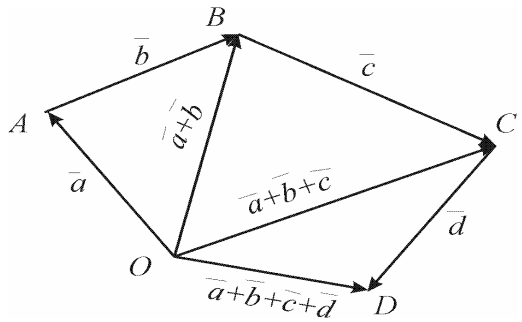


Рис. 17

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следует понимать, что векторы, изображенные на рис. 9–17 *в плоскости рисунка*, на самом деле являются проекциями *пространственных* векторов на плоскость рисунка. Вектор $\overline{0}$ изображается точкой (начало совпадает с концом). Но аналогично точкой изобразится и любой вектор, перпендикулярный плоскости рисунка. В частности, на рис.8 ось *Ox* спроектируется в точку *O*. Чтобы избежать этого, для наглядности, векторы и оси перед проектированием отклоняются на некоторый угол от перпендикуляра.

Теоремы о проекциях векторов. Разложение вектора по базису

ТЕОРЕМА 3. *Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме проекций на эту ось, то есть*

$$np_u(\overline{a}_1 + \overline{a}_2\,) = np_u\overline{a}_1 + np_u\overline{a}_2\,.$$

Эта теорема легко обобщается на сумму любого числа векторов.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\overline{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}, \overline{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$, то $\overline{a} + \overline{b} = \; = \{X_1 + X_2; Y_1 + Y_2; Z_1 + Z_2\}$.

ТЕОРЕМА 4. *При умножении вектора $\overline{a}$ на число α его проекция умножается на это число, то есть $np_u(\alpha\,\overline{a}) = \alpha\, np_u\overline{a}$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\overline{a} = \{X; Y; Z\}$, то $\alpha\,\overline{a} = \{\alpha X; \alpha Y; \alpha Z\}$ для любого числа α .

СЛЕДСТВИЕ 3 (признак коллинеарности векторов). Если $\overline{a} \neq \overline{0}, \overline{b} \neq \overline{0}$, то для их коллинеарности необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны, то есть

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1}. \qquad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. По соглашению в признаке коллинеарности (3) допускается, чтобы в одном или двух соотношениях знаменатели равнялись нулю. Тогда и соответствующие числители также равны нулю.

Пусть $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – единичные векторы (орты) осей координат *Ox, Oy, Oz*, то есть $|\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1$ и каждый из них одинаково направлен с соответствующей осью. Тройка векторов $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ называется *базисом.*

ТЕОРЕМА 5. *Любой вектор* $\overline{a}$ *может быть единственным образом разложен по базису, то есть представлен в виде суммы*

$$\overline{a} = X\,\overline{i} + Y\,\overline{j} + Z\,\overline{k}\,.$$

Здесь коэффициенты при $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ совпадают с координатами вектора $\overline{a}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение вектора.
2. Могут ли равные векторы быть неколлинеарными? А наоборот – коллинеарные не быть равными?
3. Сколько существует векторов, равных данному?
4. Как геометрически построить проекцию вектора на ось?
5. Что такое координаты вектора и как их вычислить через координаты его начала и конца?
6. С какими геометрическими фигурами связаны правила сложения векторов?
7. Как по данным координатам векторов $\overline{a} = (X,Y,Z)$ и $\overline{b} = (X,Y,Z)$ найти векторов $\overline{a} + \overline{b}$ и $\lambda\overline{a}$ $(\lambda = const)$?
8. Сформулируйте признак коллинеарности векторов? Как расположены в пространстве коллинеар-ные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если знаменатели Y_1 и Z_1 в признаке коллинеарности равны нулю? А может ли дополнительно и X_1 равняться нулю?
9. Напишите разложение вектора по базису в пространстве *Oxyz* и на плоскости *Oxy*.
10. Как связаны координаты радиус-вектора и координаты его конца?

Тестовые задания

1. Дан вектор $\overline{M_1M_2}(5;-4;3)$ и точка $M_1(-3;5;-3)$. Найти координаты точки M_2.
   ОТВЕТ: $M_2(2;1;0)$.
2. Дан вектор $\overline{a} = (2,2,-1)$. Найти коллинеарный ему вектор, если его модуль равен 6.
   ОТВЕТ: два вектора $\overline{b}_1 = (4;4;-2)$ и $\overline{b}_2 = (-4;-4;2)$.

1.2.4. Скалярное произведение векторов и его свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют число (скаляр), равное произведению их модулей на косинус угла φ между ними.

Скалярное произведение обозначают $\overline{a} \cdot \overline{b}$ (в некоторых учебниках используется обозначение $(\overline{a},\overline{b})$). Следовательно,

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot cos\varphi\,. \qquad (1)$$

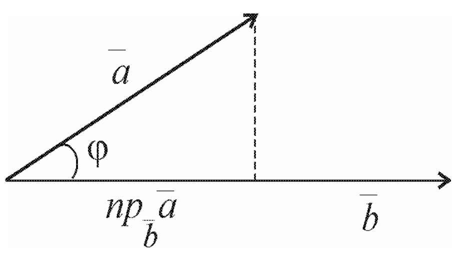


Рис. 18.

Из рис. 18 и теоремы 3.1 следует

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{b}| \cdot пр_{\overline{b}}\overline{a}\,.$$

Аналогично $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot пр_{\overline{a}}\overline{b}$.

Если хотя бы один из векторов равен $\overline{0}$, то по определению полагают $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.

Рассмотрим некоторые свойства скалярного произведения.

1. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$ – свойство перестановочности.

2. $(\alpha\,\overline{a})\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot(\alpha\,\overline{b})=\alpha(\overline{a}\cdot\overline{b})$.

3. $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$ – свойство распределительности.

4. $\overline{a}\cdot\overline{a}=\left|\overline{a}\right|^2$. Это равенство следует из формулы (1), где $\overline{a}=\overline{b}$ и $\varphi=0$. Скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{a}$ называется *скалярным квадратом* и обозначается $\overline{a}^2$. Тогда $\overline{a}^2=\left|\overline{a}\right|^2$, и длина вектора $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{\overline{a}^2}$. Скалярный квадрат $\overline{a}^2\geq 0$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\left|\overline{a}\right|=\overline{0}$.

5. *Признак ортогональности векторов*: для ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$ тогда и только тогда, когда $\overline{a}\perp\overline{b}$.

Из свойств 4 и 5 легко получить для базисных векторов $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ следующие равенства:

$$\overline{i}^2=\overline{j}^2=\overline{k}^2=1,\quad \overline{i}\cdot\overline{j}=\overline{i}\cdot\overline{k}=\overline{j}\cdot\overline{k}=0. \tag{2}$$

Используя свойства скалярного произведения, можно получить его выражение через координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (в координатной форме).

СЛЕДСТВИЕ 1. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы координатами:

$$\overline{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\},\overline{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\},\text{ то }\overline{a}\cdot\overline{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2, \tag{3}$$

то есть скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат.

СЛЕДСТВИЕ 2. Длина вектора $\overline{a}$ вычисляется по формуле

$$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}. \tag{4}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определяется из равенства

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}} \tag{5}$$

Заметим, что отрицательное значение числителя (скалярного произведения) означает, что $\pi/2<\varphi\leq\pi$.

СЛЕДСТВИЕ 4 (координатная форма признака ортогональности). Необходимым и достаточным условием ортогональности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ является равенство:

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0. \tag{6}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Формулы (3–6) упрощаются для векторов в плоскости *Oxy* путем отбрасывания третьих слагаемых (связанных с координатой *Z*).

СЛЕДСТВИЕ 5. Линейные комбинации векторов можно скалярно умножать как многочлены.

ПРИМЕР 1. Вычислить $(3\overline{a}+5\overline{b}-2\overline{c})\cdot(\overline{a}-2\overline{b}-4\overline{c})$.

РЕШЕНИЕ. Воспользовавшись свойствами скалярного произведения, получим:

$$(3\overline{a}+5\overline{b}-2\overline{c})\cdot(\overline{a}-2\overline{b}-4\overline{c})=3\overline{a}\cdot\overline{a}+5\overline{b}\cdot\overline{a}-2\overline{c}\cdot\overline{a}-6\overline{a}\cdot\overline{b}-10\overline{b}\cdot\overline{b}+4\overline{c}\cdot\overline{b}-12\overline{a}\cdot\overline{c}-20\overline{b}\cdot\overline{c}+8\overline{c}\cdot\overline{c}=$$
$$=3\overline{a}^2-\overline{b}\cdot\overline{a}-14\overline{a}\cdot\overline{c}-10\overline{b}^2-16\overline{b}\cdot\overline{c}+8\overline{c}^2.$$

ПРИМЕР 2. Найти угол между векторами $\overline{a}\,(-1;-1;0)$ и $\overline{b}\,(1;0;1)$.

РЕШЕНИЕ. Используем формулу (5):

$$\cos\varphi=\frac{-1\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot1}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=-\frac{1}{2}.$$

Так как $cos\,\varphi < 0$, найдем сначала $\varphi_1 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Отсюда $\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ (или 120°).

ПРИМЕР 3. Дан треугольник ABC: A(–2;0), B(1;–1), C(2;1). Найти угол $\varphi = \angle BAC$.

РЕШЕНИЕ. Будем искать угол φ как угол между векторами $\overline{AB}(3;-1)$ и $\overline{AC}(4;1)$ (см. пример 3.1). Теперь используем формулу (5), учитывая ее упрощение для координатной плоскости Oxy:

$$cos\,\varphi = \frac{3\cdot 4 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{11}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{17}} = \frac{11}{\sqrt{170}}.$$

Отсюда $\varphi = \arccos\frac{11}{\sqrt{170}}$.

Если требуется, можно найти значение $\frac{11}{\sqrt{170}}$ с точностью до четырех знаков и определить значение φ в градусах по таблицам Брадиса либо вычислить φ (в градусах и радианах) с помощью калькулятора. В данном случае $\varphi \approx \arccos 0{,}8437 \approx 32^\circ 28' \approx 32{,}47^\circ \approx 0{,}5667$ рад.

Контрольные вопросы

1. Как определяется угол между векторами?
2. Дайте определение скалярного произведения.
3. Перечислите свойства скалярного произведения.
4. Докажите, что $(\overline{a} + \overline{b})^2 + (\overline{a} - \overline{b})^2 = 2(\overline{a}^2 + \overline{b}^2)$. Сделайте рисунок и определите, какая теорема из школьного курса геометрии соответствует этому равенству.
5. Как вычисляется скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$ по данным координатам векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$?
6. Напишите признак коллинеарности векторов.

Тестовые задания

1. Даны точки A(2; 2) и B(5;-2). На оси абсцисс найдите такую точку M, чтобы $\angle \mathrm{AMB} = \pi/2$.
   ОТВЕТ: две точки $\mathrm{M}_1(1;0)$, $\mathrm{M}_2(6;0)$.
2. Дан ΔABC : A(2; 1), B(–3; 2), C(4;–5). Найти угол между медианой BM и стороной BC.
   ОТВЕТ: $\angle MBC = \arccos\frac{5}{\sqrt{26}}$.
3. Найти вектор $\overline{b}$, ортогональный вектору $\overline{a} = (2;1)$ и имеющий длину $2\sqrt{5}$.
   ОТВЕТ: два таких вектора $\overline{b}_1 = (2;-4)$, $\overline{b}_2 = (-2;4)$.

1.2.5. Векторное и смешанное произведения векторов

В пункте 1.2.3 были рассмотрены линейные операции (сложение и умножение на число) над векторами, в пункте 1.2.4 была рассмотрена нелинейная операция – скалярное произведение **двух** векторов. В данном пункте рассмотрим еще две нелинейных операции над векторами: векторное произведение **двух** векторов и смешанное произведение **трех** векторов. Рассмотрим предварительно некоторые вспомогательные понятия.

В пространстве различают правые и левые тройки векторов. Приведем три эквивалентных определения правой и левой тройки векторов.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ называется *правой,* если наблюдателю из их общего начала обход концов векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ в указанном порядке кажется совершающимся по часовой стрелке. В противном случае $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ – *левая* тройка.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ называется *правой,* если из конца третьего вектора ($\overline{c}$) кратчайший поворот от первого ($\overline{a}$) ко второму ($\overline{b}$) виден против часовой стрелки. В противном случае $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ – *левая* тройка.

Правая (левая) тройка располагается так, как могут быть расположены соответственно большой, несогнутый указательный и средний пальцы правой (левой) руки.

Все правые (или левые) тройки векторов называются одинаково ориентированными. Ниже тройка векторов базиса $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ считается правой.

Векторное произведение двух векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Векторным произведением* **двух** ненулевых и неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется **вектор**, обозначаемый символом $\bar{a} \times \bar{b}$, который определяется следующими тремя условиями:

1) модуль вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ равен произведению $|\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ перпендикулярен каждому из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a} \times \bar{b}$ образуют правую тройку векторов.

Векторное произведение полагают равным нулю (нулевому вектору), если $\bar{a} = \bar{0}$ или (и) $\bar{b} = \bar{0}$ или $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны.

Основные свойства векторного произведения

1. Модуль $|\bar{a} \times \bar{b}|$ векторного произведения равен площади параллелограмма[4], построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.
2. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$ (антиперестановочность, при перестановке множителей векторное произведение изменяет свое направление на обратное).
3. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$ (распределительное свойство относительно сложения векторов).
4. $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$ (сочетательность по отношению к скалярному множителю λ).
5. $\bar{a} \times \bar{b} = 0$, лишь если $\bar{a} = \bar{0}$ или (и) $\bar{b} = \bar{0}$ или $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны.
6. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы координатами: $\bar{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$, $\bar{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = \{Y_1Z_2 - Y_2Z_1;\ X_2Z_1 - X_1Z_2;\ X_1Y_2 - X_2Y_1\}$, или, забегая вперед (тема 1.3), эту формулу можно с помощью определителей второго порядка записать в виде $\bar{a} \times \bar{b} = \left\{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right\}$.
7. Линейные комбинации векторов можно векторно умножать как скалярные многочлены, с тем отличием что при перестановке множителей (например, при приведении подобных членов) необходимо изменять знак.
8. Поскольку тройка базисных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – правая, из определения и свойств 2, 5 векторного произведения, получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} &\bar{i} \times \bar{i} = 0, \quad \bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}, \\ &\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{j} = 0, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \\ &\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}, \quad \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{k} = 0. \end{aligned}$$

Если векторы заданы координатами, то из свойства 6 и следствия 2 пункта 1.2.4 вытекает следующее геометрическое приложение векторного произведения.

ТЕОРЕМА 1. Площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ и $\bar{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$, находится по формуле

[4] Параллелограмм [от греческого parallelogrammon] – четырехугольник, противоположные стороны которого параллельны.

$$S = \left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = \sqrt{(Y_1Z_2 - Y_2Z_1)^2 + (X_2Z_1 - X_1Z_2)^2 + (X_1Y_2 - X_2Y_1)^2}\text{ , или}$$

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}\ .$$

ПРИМЕР 1. Даны векторы $\overline{a} = \{2;5;7\}$ и $\overline{b} = \{1;2;4\}$. Найти координаты векторного произведения $\overline{a}\times\overline{b}$ и площадь S параллелограмма, построенного на этих векторах.

РЕШЕНИЕ. Поскольку свойство 6 позволяет выражать координаты векторного произведения $\overline{a}\times\overline{b}$ через координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то, применив его, получим:

$$\overline{a}\times\overline{b} = \left\{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right\} = \{5\cdot 4 - 7\cdot 2;\quad 7\cdot 1 - 4\cdot 2;\quad 2\cdot 2 - 5\cdot 1\} = \{6; -1; -1\}.$$

Для нахождения площади параллелограмма воспользуемся свойством 1 векторного произведения и следствием 2 пункта 1.2.4: $S = \left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{38} \approx 6.1644.$

ОТВЕТ: $\overline{a}\times\overline{b} = \{6; -1; -1\},\quad S = \sqrt{18} \approx 6.1644.$

ПРИМЕР 2. Вычислить $(3\overline{a} + 5\overline{b} - 2\overline{c})\times(\overline{a} - 2\overline{b} - 4\overline{c})$.

РЕШЕНИЕ. Воспользовавшись свойствами 2, 3, 4 и 7 векторного произведения, получим:

$$(3\overline{a} + 5\overline{b} - 2\overline{c})\times(\overline{a} - 2\overline{b} - 4\overline{c}) =$$
$$= 3\overline{a}\times\overline{a} + 5\overline{b}\times\overline{a} - 2\overline{c}\times\overline{a} - 6\overline{a}\times\overline{b} - 10\overline{b}\times\overline{b} + 4\overline{c}\times\overline{b} - 12\overline{a}\times\overline{c} - 20\overline{b}\times\overline{c} + 8\overline{c}\times\overline{c} =$$
$$= \overline{0} + 5\overline{b}\times\overline{a} + 2\overline{a}\times\overline{c} - 6\overline{a}\times\overline{b} + \overline{0} - 4\overline{b}\times\overline{c} - 12\overline{a}\times\overline{c} - 20\overline{b}\times\overline{c} + \overline{0} =$$
$$= -11\overline{a}\times\overline{b} - 10\overline{a}\times\overline{c} - 24\overline{b}\times\overline{c} = 11\overline{b}\times\overline{a} + 10\overline{c}\times\overline{a} + 24\overline{c}\times\overline{b}.$$

ОТВЕТ: $\left(3\overline{a} + 5\overline{b} - 2\overline{c}\right)\times\left(\overline{a} - 2\overline{b} - 4\overline{c}\right) = 11\overline{b}\times\overline{a} + 10\overline{c}\times\overline{a} + 24\overline{c}\times\overline{b}.$

Смешанное произведение трех векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Смешанным произведением* $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называется **число**, равное *скалярному* произведению вектора $\overline{a}$ на *векторное* произведение векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c}).$$

Основные свойства смешанного произведения

1. $\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c}) = \left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}$ (знаки $\cdot$ и $\times$ в смешанном произведении можно менять местами, потому смешанное произведение и обозначается более простым символом: $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$).

2. $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a} = \overline{c}\,\overline{a}\,\overline{b} = -\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b} = -\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c} = -\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}$ (перестановка двух множителей меняет знак смешанного произведения; круговая перестановка всех трех множителей – не меняет).

3. $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = 0$, лишь если $\overline{a} = \overline{0}$ или (и) $\overline{b} = \overline{0}$ или (и) $\overline{c} = \overline{0}$, или векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны.

4. $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} > 0$, если тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – правая.

5. $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} < 0$, если тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – левая.

6. Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда[5], построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

[5] Параллелепипед [от греческого parallelos – параллельный + epipedon – плоскость] – шестигранник, тело, ограниченное шестью параллелограммами.

7. Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ заданы координатами: $\bar{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$, $\bar{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$, $\bar{c} = \{X_3; Y_3; Z_3\}$, то $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = X_1Y_2Z_3 - X_1Y_3Z_2 + X_3Y_1Z_2 - X_2Y_1Z_3 + X_2Y_3Z_1 - X_3Y_2Z_1$ или, что одно и тоже, но более компактно (см. тема 1.3) $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$.

Свойство 7 позволяет выражать смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ через координаты векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Рассмотрим пример на геометрическое приложение смешанного произведения.

ПРИМЕР 3. В трехмерном пространстве даны четыре точки $A(1;1;1)$, $B(4;4;4)$, $C(3;5;5)$ и $D(2;4;7)$. Найти:

Объем V_n параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

Объем V_T тетраэдра[6] $ABCD$.

РЕШЕНИЕ. 1. Согласно свойству 6 объем $V_П$ параллелепипеда равен модулю смешанного произведения $\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}$. Найдем координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}$ и $\overline{AD}$. По теореме 2 (пункт 1.2.3.) имеем: $\overline{AB} = (4-1;4-1;4-1) = (3;3;3)$, $\overline{AC} = (3-1;5-1;5-1) = (2;4;4)$ и $\overline{AD} = (2-1;4-1;7-1) = (1;3;6)$. Вычислим смешанное произведение $\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot4\cdot6 - 3\cdot3\cdot4 + 1\cdot3\cdot4 - 2\cdot3\cdot6 + 2\cdot3\cdot3 - 1\cdot4\cdot3 =$

$= 72 - 36 + 12 - 36 + 18 - 12 = 18.$

Таким образом, $V_П = \left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right| = |18| = 18.$

2.Как известно из элементарной геометрии, объем V_T тетраэдра равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}$ и $\overline{AD}$. Таким образом, $V_T \frac{1}{6} V_П \frac{1}{6} \cdot 18 = 3.$

ОТВЕТ: $V_П = 18$; $V_T = 3$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение векторного произведения.
2. Перечислите свойства векторного произведения.
3. Дайте определение смешанного произведения векторов.
4. Перечислите свойства смешанного произведения.
5. Докажите, что если векторное произведение ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы коллинеарны.
6. Докажите, что если смешанное произведение ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы компланарны.
7. С помощью какого произведения векторов обычно находят площадь?
8. С помощью какого произведения векторов обычно находят объем?
9. Что является условием коллинеарности векторов?
10. Что является условием компланарности векторов?

Тестовые задания

1. Чему равно векторное произведение двух одинаковых векторов?
   ОТВЕТ: нулевому вектору.
2. Чему равно смешанное произведение трех одинаковых векторов?
   ОТВЕТ: нулю.
3. Чему равно произведение векторов $\bar{j} \cdot (\bar{k} \times \bar{i})$?
   ОТВЕТ: нулю.

[6] Тетраэдр [от греческого tetra – четыре + herda – основание, поверхность, сторона] – четырехгранник, все грани которого треугольники, т.е. треугольная пирамида; травильный тетраэдр ограничен четырьмя равносторонними треугольниками; один из пяти правильных многогранников.

4. Чему равно произведение векторов $-(\bar{j}\times\bar{k})\times\bar{k}$?
   ОТВЕТ: вектору $\bar{j}$.
5. Чему равно произведение векторов $(\bar{i}\times\bar{i})\times\bar{j}$?
   ОТВЕТ: нулевому вектору.
6. Чему равно произведение векторов $\bar{k}\times(\bar{i}\cdot\bar{i})$?
   ОТВЕТ: вектору $\bar{k}$.
7. Чему равно произведение векторов $-(\bar{i}\times\bar{k})\cdot(\bar{k}\times\bar{i})$?
   ОТВЕТ: единице.

1.2.6. Уравнение прямой на плоскости *Oxy*

Используя признаки ортогональности и коллинеарности векторов на плоскости, можно вывести различные формы уравнений прямой.

Прямая L определяется однозначно, если задать точку $M_0(x_0;y_0)\in L$ и ненулевой вектор $\overline{N}(A;B)\perp L$, $A^2+B^2\neq 0$. Вектор $\overline{N}$ называется *нормалью* прямой. Возьмем точку с текущими координатами $M(x;y)\in L$ (рис.19).

Тогда вектор $\overline{M_0M}(x-x_0;y-y_0)\perp\overline{N}$, и по признаку ортогональности (4.6) имеем:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \tag{1}$$

Это уравнение прямой, проходящей через заданную точку M_0 и имеющей нормаль $\overline{N}$.

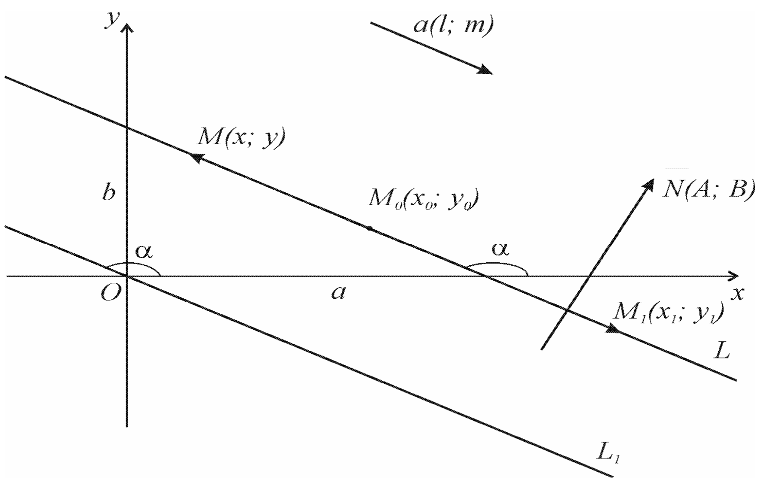


Рис. 19

Обозначив $C=-Ax_0-By_0$, получим *общее уравнение прямой* на плоскости *Oxy*:

$$Ax+By+C=0 \tag{2}$$

Верно и обратное утверждение: любое уравнение вида (2), в котором $A^2+B^2\neq 0$ (то есть хотя бы один из коэффициентов *A, B* не равен нулю), является уравнением некоторой прямой на плоскости *Oxy*, и ненулевой вектор $\overline{N}(A;B)$ перпендикулярен этой прямой.

Рассмотрим частные случаи уравнения (2).

1. $A\neq 0, B=0$. Получим $Ax+C=0$, или

$$x=a,\quad a=-\frac{C}{A}. \tag{3}$$

Эта прямая параллельна оси *Oy* и отсекает на оси *Ox* отрезок, имеющий *величину a*. При *C*=0 прямая совпадает с осью *Oy*.

2. $A=0, B\neq 0$. Аналогично предыдущему получаем уравнение прямой $By+C=0$, параллельной оси *Ox*, или $y=b,\quad b=-\dfrac{C}{B}$ (4)

b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy. При C=0 прямая совпадает с осью Ox.

3. $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$. Уравнение имеет вид $Ax+By=0$, или

$$y = kx, \quad k = -\frac{A}{B} \tag{5}$$

Из x=0 следует y=0, т.е. прямая проходит через начало координат (прямая L_1 на рис.19). Величина k называется *угловым коэффициентом прямой*, $k = tg\,\alpha$, где α – угол между осью Ox и прямой, отсчитываемый против часовой стрелки (*угол наклона* прямой); $k \geq 0$ при $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, $k < 0$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Пусть теперь A, B и C не равны нулю. Учитывая предыдущие обозначения, можем из (2) получить еще две формы уравнения прямой:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{6}$$

– *уравнение прямой в отрезках* и

$$y = kx + b \tag{7}$$

– *уравнение с угловым коэффициентом*.

Рассмотрим еще один способ получения уравнения прямой. Прямая L будет однозначно определена, если задать точку $M_0(x_0;\ y_0) \in L$ и вектор $\overline{a}(l; m) \parallel L$, который называется *направляющим вектором прямой*. Пусть $l \neq 0$, $m \neq 0$ и точка $M(x;\ y) \in L$ (рис.19). Тогда векторы $\overline{a}$ и $\overline{M_0M}(x - x_0; y - y_0)$ коллинеарны. Из признака коллинеарности (3.3) следует:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}\ . \tag{8}$$

Это уравнение называется *каноническим* уравнением прямой.

Если заданы две точки M_0 и $M_1(x_1;\ y_1) \in L$, то вектор $\overline{M_0M_1}$ можно принять в качестве направляющего (рис. 19). Получаем *уравнение прямой, проходящей через две точки*:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}\,,\ x_1 \neq x_0\,,\ y_1 \neq y_0\,. \tag{9}$$

В соответствии с замечанием (3.3) допускается, что в формулах (8), (9) один из знаменателей равен нулю. Тогда и соответствующий числитель обращается в нуль. Например, при l=0 (x_1=x_0) уравнение прямой будет иметь вид x=x_0.

Обозначив равные соотношения в (8) буквой t, получим систему

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}. \tag{10}$$

Это *параметрическое уравнение прямой*, где $t \in R$ – параметр.

Две пересекающиеся прямые образуют два смежных угла, один из которых равен углу между их нормалями (направляющими векторами). Например, для общих уравнений прямых с нормалями $\overline{N_1}(A_1; B_1)$, $\overline{N_2}(A_2; B_2)$ угол между ними вычисляется по формуле:

$$cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\ . \tag{11}$$

Из формул (3.3) и (4.6) соответственно следуют *признаки параллельности*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \tag{12}$$

и *перпендикулярности прямых*

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{13}$$

Если прямые заданы в форме (7) с угловыми коэффициентами k_1 и k_2, то угол между ними вычисляется по формуле:

$$tg\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|. \tag{14}$$

В этом случае условием параллельности будет $k_1 = k_2$, а перпендикулярности $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

В качестве примера использования введенных в этом параграфе формул решим в общем виде следующую задачу: найти расстояние от точки $M^*(x^*;\ y^*)$ до прямой L, заданной уравнением $Ax+By+C=0$.

РЕШЕНИЕ. Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ – точка пересечения прямой L с прямой M_0M^*, перпендикулярной L. Если мы найдем координаты точки M_0, то расстоянием d от точки M^* до L будет расстояние между точками M_0 и M^*. Прямая M_0M^* проходит через точку M^* и имеет в качестве направляющего вектора нормаль заданной прямой $\overline{N}(A;B)$. Запишем ее уравнение в параметрической форме (10):

$$\begin{cases} x = x^* + A\,t \\ y = y^* + B\,t \end{cases}. \tag{15}$$

Координаты точки пересечения прямых L и M_0M^* являются решением системы уравнений (15) и (2). Подставив выражения для x, y из (15) в (2), получим значение $t=t_0$ для точки пересечения M_0:

$$t_0 = -\frac{Ax^* + By^* + C}{A^2 + B^2}.$$

Подставляя это значение t в (15), получим x_0, y_0. Отсюда

$$\begin{cases} x_0 - x^* = A\,t_0 \\ y_0 - y^* = B\,t_0 \end{cases}.$$

и

$$d = \sqrt{(x_0 - x^*)^2 + (y_0 - y^*)^2} = |t_0|\sqrt{A^2 + B^2}\ .$$

Окончательно получаем формулу расстояния от точки для прямой:

$$d = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{16}$$

ПРИМЕР 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;–1)$ и составляющей с данной прямой L: $4x–3y+2=0$ угол $\varphi = arctg2$, и расстояние до нее от точки $M_1(–3;1)$ (рис. 20).

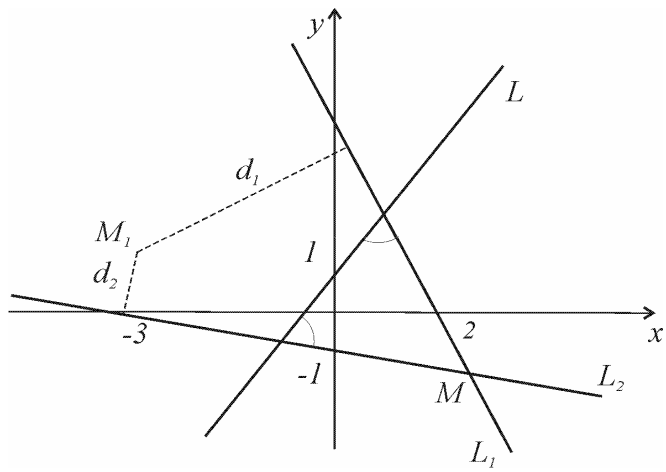


Рис. 20

РЕШЕНИЕ. Преобразуем уравнение данной прямой L к виду уравнения с угловым коэффициентом (7): $y=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$ и обозначим угловой коэффициент искомой прямой через k_1. По формуле (14)

$$tg(arctg2)=2=\left|\frac{k_1-\frac{4}{3}}{1+k_1\cdot\frac{4}{3}}\right|.$$

Так как в этом уравнении стоит абсолютная величина, то задача имеет два решения:

$$\frac{k_1-\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}k_1}=\pm 2.$$

Получаем два значения: $k_1^{/}=-2$, $k_1^{//}=-\frac{2}{11}$. Для нахождения значения b воспользуемся тем, что прямая

$$y = k_1x + b$$

проходит через точку $M(2; -1)$, т.е.

$$-1 = 2k_1 + b.$$

Вычитая последнее соотношение из предыдущего, получим

$$y+1=k_1(x-2)$$

или $y=k_1x+(-2k_1-1)$. Подставив оба значения k_1, получим два уравнения искомых прямых:

$$\mathrm{L}_1 : y=-2x+3$$

$$\mathrm{L}_2 : y=-\frac{2}{11}x-\frac{7}{11}.$$

Для нахождения расстояния до этих прямых преобразуем их к общему виду:

$$2x + y - 3=0,$$

$$2x + 11y + 7=0$$

и воспользуемся формулой (16):

$$d_1=\frac{|2\cdot(-3)+1\cdot1-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=1{,}6\cdot\sqrt{5}\approx 3{,}5,$$

$$d_2=\frac{|2\cdot(-3)+11\cdot1+7|}{\sqrt{2^2+11^2}}=\frac{12}{\sqrt{125}}=0{,}48\cdot\sqrt{5}\approx 1{,}1.$$

ПРИМЕР 2. Даны вершины $A(2;0)$, $B(8;-3)$, $C(5;-4)$ треугольника (рис. 21).
Найти: 1) длину стороны AB;
2) внутренний угол A в радианах с точностью до 0,001;
3) уравнение высоты, проведенной через вершину C;
4) уравнение медианы, проведенной через вершину C;
5) точку пересечения высот треугольника;
6) длину высоты, опущенной из вершины C.

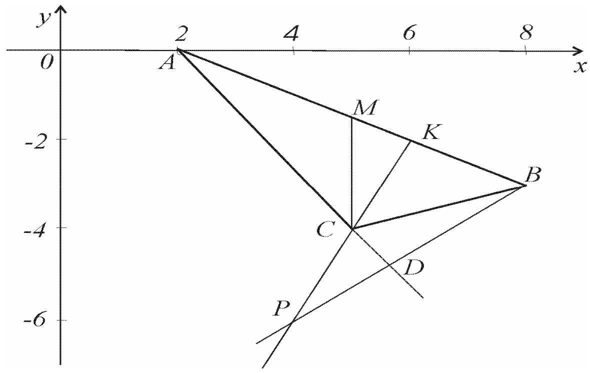


Рис. 21

РЕШЕНИЕ.

1) Найдем координаты вектора $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}\,(8–2;–3–0)=\ \overline{AB}\,(6;–3).$$

Длина стороны AB равна

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}7\ .$$

2) Внутренний угол A будем искать как угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}\,(3;–4)$:

$$cos\angle A = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|} = \frac{6\cdot 3 + (-3)\cdot(-4)}{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\ .$$

Для нахождения угла A с требуемой точностью, вычислим правую часть с точностью до четырех знаков:

$$cos\angle A \approx 0{,}8944\ .$$

Тогда угол $A \approx arccos\, 0{,}8944 \approx 26^0 34'$. Преобразуем в радианы:

$$\angle A \approx 26\frac{34}{60}\cdot\frac{\pi}{180} \approx 26\frac{34}{60}\cdot\frac{3{,}1416}{180} \approx 0{,}464\ \text{рад.}$$

3) Прямая $CK \perp AB$ проходит через точку $C(5;\ –4)$ и имеет нормалью вектор $\overline{AB}\,(6;\ –3)$. По формуле (1) получим уравнение высоты:

$$6(x–5) – 3(y+4) = 0,$$

$$6x – 3y – 42 = 0.$$

Сокращая на 3, получим уравнение высоты

$$2x – y – 14 = 0. \qquad (17)$$

4) Координаты основания медианы будут:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+8}{2} = 5\ ,\ \ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+(-3)}{2} = -1{,}5$$

Уравнение медианы найдем, используя формулу (9), как уравнение прямой, проходящей через две точки: C и M.

$$\frac{x-5}{5-5} = \frac{y+4}{-1{,}5+4}\ .$$

Так как знаменатель левой части равен нулю, то уравнением медианы будет

$$x–5=0 \text{ или } x=5.$$

5) Известно, что высоты треугольника пересекаются в одной точке P. Уравнение высоты CK (17) найдено. Выведем аналогичным способом уравнение высоты BD, проходящей через точку B перпендикулярно вектору $\overline{AC}\,(3;–4)$.

$$3(x–8) – 4(y+3) = 0,$$

$$3x – 4y – 36 = 0.$$

Координаты точки P найдем как решение системы:

$$\begin{cases} 2x - y - 14 = 0 \\ 3x - 4y - 36 = 0 \end{cases}.$$

Решив ее, получим: $x_p = 4$, $y_p = –6$.

6) Длину высоты h_c будем искать как расстояние от точки C до прямой AB. Эта прямая проходит через точку A и имеет направляющий вектор $\overline{AB}$. По формуле (8) получим:

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y-0}{-3}, \; x + 2y - 2 = 0.$$

Теперь воспользуемся формулой (16), подставляя в нее координаты точки $C(5;–4)$:

$$h_C = \frac{|5 + 2 \cdot (-4) - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5} \approx 2{,}2.$$

В этой задаче много заданий, поэтому имеет смысл обобщить результаты.

ОТВЕТ.

1) $\left|\overline{AB}\right| \approx 6{,}7$;

2) $\angle A \approx 0{,}464$ рад.

3) уравнение высоты CK: $2x – y – 14 = 0$;

4) уравнение медианы CM: $x = 5$;

5) точка пересечения высот: $P(4;–6)$;

6)длина высоты CK: $h_C \approx 2{,}2$.

Контрольные вопросы

1. Какие признаки из векторной алгебры используются для построения уравнений прямой на плоскости Oxy?
2. Перечислите виды уравнений прямой на плоскости.
3. Пусть дано общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$, причем A, B, C не равны нулю, точка $M(x_0, y_0)$ лежит на прямой. Составьте все другие известные вам виды уравнений.
4. При каком значении A прямая будет параллельна оси Ox?
5. Как найти угол между прямыми, заданными: общими уравнениями; параметрическими; уравнениями с угловым коэффициентом?

Тестовые задания

1. Дан $\Delta A_1A_2A_3$: $A_1(2;\ –2)$, $A_2(6;\ 1)$, $A_3(–2;\ 0)$. Найти уравнение и длину высоты A_3D и координаты точки пересечения высот M.

   ОТВЕТ: $4x + 3y + 8 = 0$; $h = \left|\overline{A_3D}\right| = 4$; $M(5/2;–6)$.

1.2.7. Уравнение плоскости в пространстве *Oxyz*

Пусть в пространстве задана точка $M_o(x_o;\ y_o;\ z_o)$, принадлежащая плоскости P, и вектор $\overline{N}(A;B;C) \perp P$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, называемый *нормалью* плоскости. Если $M(x;\ y;\ z)$ – любая точка плоскости P, то и вектор $\overline{M_0M}$ $(x–x_0;\ y–y_0;\ z–z_0)$ лежит в плоскости и поэтому $\overline{M_0M} \perp \overline{N}$. По признаку ортогональности векторов (4.6) получаем

$$A(x–x_0)+B(y–y_0)+C(z–z_0)=0.$$

Обозначим $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$. Тогда

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{1}$$

Это *общее уравнение плоскости.* Верно и обратное утверждение: любое уравнение вида (1), в котором $A^2+B^2+C^2\neq 0$, т.е. хотя бы один из коэффициентов не равен нулю, является уравнением некоторой плоскости, и ненулевой вектор $\overline{N}(A;B;C)$ перпендикулярен этой плоскости.

Рассмотрим частные случаи уравнения (1).

1) Пусть все коэффициенты уравнения и свободный член D не равны нулю. Перенесем D в правую часть и разделим обе части на $-D$. Получим

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{2}$$

где $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$. Пусть какие-то две из переменных равны нулю. Например, при $y=z=0$ получаем $\frac{x}{a}=1$ или $x=a$. Т.е. плоскость пересекает ось Ox в точке $x=a$. Отсюда следует, что a – величина отрезка, отсекаемого плоскостью на оси Ox. Аналогично b и c – величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях Oy и Oz соответственно. Уравнение (2) называется уравнением плоскости *в отрезках.*

2) При $D=0$ получаем

$$Ax+By+Cz=0.$$

Это уравнение имеет решение (0; 0; 0), т.е. плоскость проходит через начало координат.

3) Пусть $A\neq 0$, $B=C=0$, $D\neq 0$. Плоскость имеет уравнение $x=a$. Она параллельна плоскости Oyz. Если и $D=0$, то плоскость совпадает с координатной плоскостью Oyz.

Аналогично при других комбинациях коэффициентов получаем:

$A=0$, $B\neq 0$, $C=0$ – плоскость $y=b$ параллельна Oxz;

$A=0$, $B=0$, $C\neq 0$ – плоскость $z=c$ параллельна Oxy.

4) Пусть $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C=0$, $D\neq 0$. Получаем $Ax+By+D=0$ или $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Эта плоскость параллельна оси Oz и отсекает на осях Ox, Oy отрезки величиной a, b соответственно. Если и $D=0$, то плоскость проходит через ось Oz.

Аналогично при других подобных комбинациях коэффициентов получим:

$A\neq 0$, $B=0$, $C\neq 0$ – плоскость $Ax+Cz+D=0$ параллельна Oy;

$A=0$, $B\neq 0$, $C=0$ – плоскость $By+Cz+D=0$ параллельна Ox.

Угол между плоскостями

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0 \end{aligned} \tag{3}$$

вычисляется как угол между их нормалями $\overline{N_1}(A_1;B_1;C_1)$ и $\overline{N_2}(A_2;B_2;C_2)$, т.е. из (4.5) следует:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Отсюда *признак перпендикулярности* плоскостей (3) имеет вид:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Признак параллельности плоскостей совпадает с признаком коллинеарности векторов $\overline{N_1}$, $\overline{N_2}$:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{4}$$

Если эти соотношения равны $\frac{D_1}{D_2}$, то плоскости (3) совпадают.

Расстояние от точки $M^*(x^*;\ y^*;\ z^*)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле, сходной с (5.16):

$$d = \frac{\left|Ax^* + By^* + Cz^* + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Контрольные вопросы

1. Что нужно задать для получения общего уравнения плоскости?
2. Назовите частные случаи общего уравнения плоскости. Как проходят эти плоскости?
3. Как найти угол между плоскостями?

Тестовые задания

1. Плоскость отсекает на координатных осях отрезки величиной соответственно 2; 1; –1. В результате образуется пирамида с вершиной в начале координат. Найдите ее высоту OD.
   ОТВЕТ: $h = \left|\overline{OD}\right| = 2/3$.

1.2.8. Прямая в пространстве *Oxyz*

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Эта система называется *общим уравнением прямой* в пространстве, так как геометрически каждое из уравнений (1) есть уравнение плоскости, и если плоскости непараллельны, то они пересекаются по прямой. Из признака параллельности (7.4) следуют равенства:

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0,\ C_1A_2 - C_2A_1 = 0,\ B_1C_2 - B_2C_1 = 0.$$

Если хотя бы одно из этих равенств не выполняется, то плоскости пересекаются, и система (1) определяет прямую.

Пусть на прямой L задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\overline{a}(l; m; n)$, $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$ параллелен L. Вектор $\overline{a}$ называется *направляющим.* Если точка $M(x; y; z) \in L$, то вектор $\overline{M_0M}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ коллинеарен $\overline{a}$. По признаку коллинеарности

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{2}$$

Эта система равенств называется *каноническим* уравнением прямой в пространстве.

Если на прямой заданы точки M_0 и $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, то вектор $\overline{M_0M_1}$ может быть принят в качестве направляющего. *Уравнение прямой, проходящей через две точки,* имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{3}$$

Обозначив равные соотношения в (2) буквой t, получим:

$$\begin{cases} x = x_0 + l\,t \\ y = y_0 + m\,t. \\ z = z_0 + n\,t \end{cases} \tag{4}$$

Это *параметрическое уравнение прямой* с параметром $t \in R$.

Связь между общим и каноническим уравнениями выражается соотношениями

$$1 = B_1C_2 - B_2C_1,\ m = C_1A_2 - C_2A_1,\ n = A_1B_2 - A_2B_1.$$

Угол между прямыми, заданными каноническими уравнениями, вычисляется как угол между их направляющими векторами.

Угол между прямой (2) и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ определяется как угол между прямой и ее проекцией на плоскость и вычисляется по формуле

$$sin\,\alpha = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Контрольные вопросы

1. Напишите общее уравнение прямой в пространстве *Oxyz*.
2. Как найти двугранный угол, который образуют пересекающиеся плоскости?
3. Что такое каноническое уравнение прямой? Что нужно задать для его определения?
4. Запишите каноническое уравнение в виде системы двух уравнений, то есть как общее уравнение прямой.
5. Как найти координаты направляющего вектора прямой, заданной общим уравнением?

1.2.9. Геометрическая интерпретация систем линейных уравнений и линейных неравенств с двумя и тремя неизвестными

Рассмотрим систему уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n x + B_n y + C_n = 0 \end{cases}. \tag{1}$$

Геометрически каждое уравнение системы является уравнением некоторой прямой. Если существует решение системы, то есть пара значений $(x^*; y^*)$, удовлетворяющая *всем* уравнениям, то геометрически это означает, что *все* прямые пересекаются в точке $M^*(x^*; y^*)$. Отсутствие решения системы равносильно отсутствию общей точки всех прямых. Например, для системы уравнений (n=2)

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

возможны случаи:

a) существует единственное решение, что равносильно пересечению прямых;

b) система не имеет решений – прямые параллельны;

c) существует бесконечно много решений – прямые совпадают.

Если все $C_i = 0$, то получится так называемая *однородная система*, которая имеет хотя бы одно решение (0; …; 0), т.е. все прямые проходят через начало координат.

Рассмотрим уравнение прямой

$$L\colon Ax+By+C=0 \tag{2}$$

и неравенства

$$Ax+By+C>0 \tag{3}$$

$$Ax+By+C<0 \tag{4}$$

Обозначим множества точек, координаты которых являются решениями неравенств (3), (4) через P_1, P_2 соответственно. Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Если точка $M_1(x_1;\, y_1)\in P_1$, $M_2(x_2;\, y_2)\in P_2$, то на отрезке M_1M_2 найдется точка $M_0(x_0;\, y_0)\in L$, т.е. $Ax_0+By_0+C=0$.

ТЕОРЕМА 2. Для любых точек M_1, M_2 плоскости *Oxy* координаты точки $M(x;\, y)\in M_1M_2$ удовлетворяют равенствам:

$$x=(1-t)x_1 + tx_2,$$

$$y=(1-t)y_1 + ty_2, \quad 0 \le t \le 1. \tag{5}$$

Отсюда следует, что отрезок M_1M_2 можно определить как множество точек, координаты которых удовлетворяют равенствам (5).

ТЕОРЕМА 3. Если точки M_1, M_2 обе принадлежат какому–то из множеств P_1, P_2, то любая точка отрезка M_1M_2 принадлежит этому множеству.

Теоремы 1 и 3 справедливы и для множеств точек, удовлетворяющих нестрогим неравенствам:

$$P_+ : \quad Ax + By + C \geq 0 ,$$
$$P_- : \quad Ax + By + C \leq 0 .$$

Эти множества точек называются *полуплоскостями.* Они включают точки, лежащие по одну из сторон прямой (P_- для P_+ и P_- для P_-) и саму прямую.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множества *пересекаются*, если они содержат точки, принадлежащие всем этим множествам, а множество таких точек называется их *пересечением.*

Таким образом, множества P_+ и P_- пересекаются по прямой L.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество Q называется *выпуклым*, если оно пустое, содержит одну точку или содержит все точки любого отрезка M_1M_2, если $M_1 \in Q$, $M_2 \in Q$.

На рис. 22*а* приведены примеры выпуклых множеств, на рис. 25*б* – невыпуклых (имеются отрезки, часть точек которых не входит в данное множество).

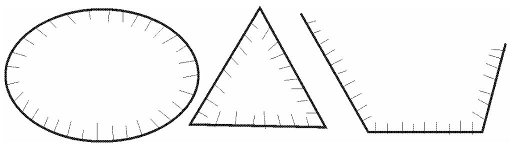


Рис. 22а

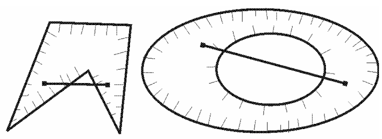


Рис. 22б

Из теоремы 3 следует, что полуплоскости являются выпуклыми множествами.

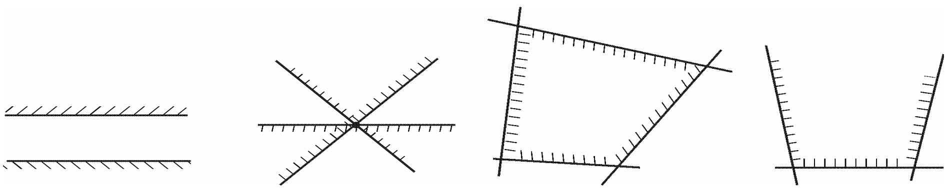
ТЕОРЕМА 4. Пересечение любого числа выпуклых множеств также выпукло.

Рассмотрим систему неравенств с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 \geq 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 \geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_nx + B_ny + C_n \geq 0 \end{cases} .$$

Заметим, что при знаке $\leq$ умножение неравенств на (–1) приводит его к виду со знаком $\geq$.

Множество решений каждого неравенства является полуплоскостью. По теореме 4 решение системы эквивалентно выпуклому множеству – пересечению полуплоскостей. На рис.23 показаны примеры возможных пересечений:



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 23

а) пересечение пусто – прямые параллельны (соответствующие полуплоскости показаны штрихами);

б) единственная точка пересечения;

в) ограниченное множество – многоугольник;

г) неограниченное множество – прямоугольная область.

ПРИМЕР 1. Составить систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC: $A(2; 0)$, $B(8; –3)$, $C(5; –4)$ (см. пример 4.2).

РЕШЕНИЕ. Для решения задачи найдем уравнения сторон треугольника, а затем для пределения знаков неравенств в левую часть каждого уравнения подставим координаты противоположной вершины, которая гарантированно принадлежит соответствующей полуплоскости.

Уравнение стороны AB получено в примере 4.2:

$$x+2y–2=0.$$

Подставим координаты точки C: $5+2\cdot(-4)-2<0$. Поэтому треугольник ABC лежит в полуплоскости

$$x+2y-2\le 0 .$$

Прямая BC проходит через точки B, C, поэтому

$$\frac{x-8}{5-8}=\frac{y+3}{-4+3},$$

$$x–3y–17=0.$$

Подставим координаты точки A: 2–0–17<0. Отсюда

$$x-3y-17\le 0 .$$

И, наконец, для прямой AC получим:

$$\frac{x-2}{5-2}=\frac{y-0}{-4-0},$$

$$4x + 3y - 8 = 0.$$

Подстановка координат точки B дает: $4\cdot 8+3\cdot(-3)-8>0$, откуда следует:

$$4x+3y+8\ge 0 .$$

ОТВЕТ. ΔABC определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} x+2y-2\le 0 \\ x-3y-17\le 0 \\ 4x+3y-8\ge 0 \end{cases}.$$

Геометрически решение представлено на рис. 24.

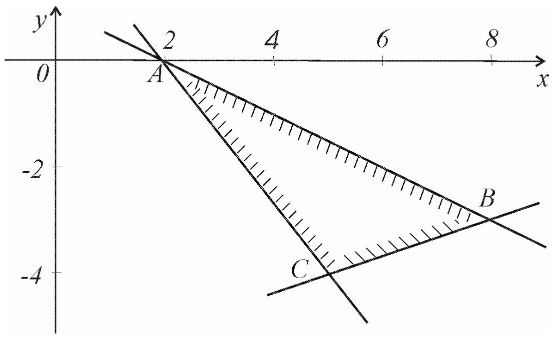


Рис. 24

Все приведенные выше понятия, определения и теоремы переносятся на случай трех переменных и координатного пространства $Oxyz$.

Множество решений уравнения

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (6)$$

есть плоскость в пространстве. Множество решений системы таких уравнений соответствует множеству точек пересечения плоскостей. Каждая плоскость (6) делит пространство $Oxyz$ на два *полупространства*:

$$S_+ : \quad Ax+By+Cz+D\ge 0 ,$$

$$S_- : \quad Ax+By+Cz+D\le 0 .$$

Эти множества являются выпуклыми. Решение системы таких неравенств эквивалентно выпуклому множеству – пересечению полуплоскостей. Ограниченное множество называется *многогранником*, а неограниченное – *многогранной областью.*

Контрольные вопросы

1. Как алгебраически определяется отрезок на плоскости?
2. Что такое полуплоскости?
3. Начертите на плоскости произвольную прямую. Выбирая точки M_1, M_2 в одной или разных полуплоскостях, убедитесь наглядно в справедливости теорем 1 и 3.
4. Какое множество называется выпуклым? Будет ли треугольник выпуклым множеством?
5. Пусть три прямые образуют треугольник ABC. Как по известным уравнениям прямых составить систему неравенств, определяющих треугольник?
6. Как называются аналоги полуплоскости, многоугольника и многоугольной области в пространстве $Oxyz$

Основная литература по теме

1. Высшая математика: Учебное пособие для студентов заочной формы обучения / Каленкович Е.Е., Соболев В.Ф., Владимиров Ю.Н., Колодко Л.С., Смилянский В.Р., Шитов К.В., Чиркунов Ю.А. – Новосибирск: НГАЭиУ, 1997. – гл. 1.
2. *Шипачев В.С.* Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1990. – гл. 3. – п.п. 1, 2, 5, 6; гл. 9. – п.п. 1–6, 9, 11–13.
3. *Шипачев В.С.* Задачник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000. – гл. 3. – п.п. 1–3, 5–7; гл. 10. – п.п. 1–4, 7–9.

ТЕМА 1.3. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.3.1. Матрицы и определители

Понятие числовой матрицы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числовой *матрицей* называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ – матрица, содержащая 3 строки ($m = 3$) и 4 столбца ($n = 4$).

Числа m и n определяют *размерность* матрицы. В нашем примере размерность матрицы 3х4 (3 на 4).

Если матрица имеет одинаковое число строк и столбцов (m=n), то она называется *квадратной матрицей порядка* n. Если $m \neq n$, то матрица называется *прямоугольной*. Обычно матрица обозначается большими латинскими буквами A, B, C,… Числа, из которых составлена матрица, называются ее *элементами* и обозначаются малыми латинскими буквами с двумя индексами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Индексы i и j элемента a_{ij} указывают место нахождения этого элемента в матрице A: первый индекс i – номер строки, а второй j – номер столбца, на пересечении которых расположен элемент a_{ij}.

Например, в матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Элемент $a_{23} = 6$, а число 2 является элементом a_{12}.

Матрица, состоящая из одной строки, называется *вектор-строкой*. Например, $A = (0\ -4\ 7\ 8)$. Матрица, состоящая из одного столбца, называется *вектор-столбцом*:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Действия над матрицами

Две матрицы A и B одинаковой размерности называются *равными*, если их элементы, стоящие на одинаковых местах, равны между собой, то есть $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$).

Матрицы одинаковой размерности можно складывать. *Суммой* двух матриц A и B является матрица C такой же размерности, элементы которой определяются равенством $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 1+2 & -1+1 \\ 3+0 & 1+5 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A на число λ называется матрица λA, у которой каждый элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ. Например,

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Если в матрице A поменять местами строки и столбцы, то получится матрица A^T, которая называется *транспонированной* к матрице A. Например,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\end{pmatrix},\ B^T=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}.$$

Если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то определено *произведение матриц* A и B, то есть новая матрица $C = AB$, в которой каждый элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, то есть

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Например,

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot 1+3\cdot(-2) & 1\cdot 2+2\cdot(-1)+3\cdot 3\\ 2\cdot 3+(-1)\cdot 1+2\cdot(-2) & 2\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+2\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 9\\ 1 & 11\end{pmatrix}$$

Если число столбцов матрицы A и число строк матрицы B различны, то произведение AB не определено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следует помнить, что произведение AB и произведение BA не обязаны совпадать, то есть, вообще говоря, $AB \neq BA$. Например, для матриц из предыдущего примера имеем

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 1+2\cdot 2 & 3\cdot 2+2\cdot(-1) & 3\cdot 3+2\cdot 2\\ 1\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 1\cdot 2+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot 3+(-1)\cdot 2\\ -2\cdot 1+3\cdot 2 & -2\cdot 2+3\cdot(-1) & -2\cdot 3+3\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4 & 13\\ -1 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}7 & 4 & 13\\ -1 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}-1 & 9\\ 1 & 11\end{pmatrix}.$$

Свойства операций над матрицами:

1) $A + B = B + A$;
2) $\lambda\ (A + B) = \lambda A + \lambda B$;
3) $(AB)C = A(BC)$;
4) $(A + B)\ C + AC + BC$;
5) $C\ (A + B) = CA + CB$;
6) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
7) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
8) $(A\ B)^T = B^T A^T$.

Определитель матрицы

Пусть A – квадратная матрица. Тогда можно говорить об *определителе* этой матрицы, то есть о некотором числе Δ, связанным с этой матрицей и вычисляемом по ее элементам.

1) Если матрица A имеет порядок, равный единице, то есть состоит из одного числа a_{11}, то определитель Δ матрицы A равен этому элементу: $\Delta = a_{11}$.

2) Если порядок матрицы равен двум, $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, то определитель этой матрицы называется определителем второго порядка и вычисляется по формуле

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

3) Для матриц более высокого порядка (n>2) определитель вычисляется по формуле разложения определителя по первой строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Здесь числа A_{11}, A_{12}, …, A_{1n} являются алгебраическими дополнениями элементов a_{11}, a_{12}, …, a_{1n} первой строки матрицы A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j}\ \Delta_{ij}$, где Δ_{ij} — определитель матрицы (n–1)-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Например, для матрицы

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

алгебраическим дополнением A_{12} элемента a_{12}=2 является число

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 9 - 7 \cdot 6) = 6;$$

алгебраическим дополнением A_{22} элемента a_{22}=5 является число

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = +(1 \cdot 9 - 7 \cdot 3) = -12;$$

ПРИМЕР 1. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

РЕШЕНИЕ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot (-2 - 0) + 1 \cdot (-1) \cdot (4 - 3) + (-1) \cdot 1 \cdot (0 - 3) = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) = -4 - 1 + 3 = -2.$$

ТЕОРЕМА 1 (разложение по строке и по столбцу).

Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов любой его строки на их алгебраические дополнения, *то есть*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов любого его столбца на их алгебраические дополнения, то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

ПРИМЕР 2. Вычислим определитель матрицы A из примера 1 разложением по третьей строке и по второму столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot A_{32} + (-2) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

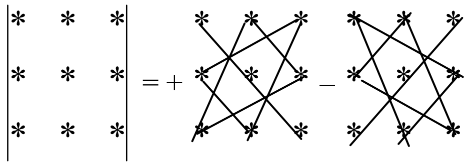
$$= 3 \cdot 1 \cdot (1 + 1) + 0 + (-2) \cdot 1 \cdot (2 + 2) = 6 - 8 = -2.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot A_{32} =$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot (4 - 3) + 1 \cdot 1 \cdot (-4 + 3) + 0 = -1 - 1 = -2.$$

Возможность вычисления матрицы разложением по любой строке или по любому столбцу позволяет выбрать строку или столбец с наибольшим количеством нулей и, следовательно, уменьшить количество вычислений алгебраических дополнений.

Рассмотренный способ вычисления определителей разложением по строке или по столбцу можно применять для определителей любого порядка, то есть для $n = 3, 4, 5, \dots$ Отметим, что для определителей третьего порядка существует простой способ вычисления определителя, называемый правилом треугольников. Он состоит в следующем: составляются произведения из трех элементов определителя, стоящих в разных строках и столбцах. Всего таких произведений получается 6. Три из них берутся со своим знаком, у остальных трех произведений знак меняется на противоположный, после чего полученные шесть чисел складываются. Схематично этот метод удобно представить в следующем виде:



Здесь линиями соединены элементы, входящие в одно произведение «+» и «–» показывают, какие произведения берутся со своим знаком, какие с противоположным.

ПРИМЕР 3. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - (7 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 9 + 8 \cdot 6 \cdot 1) =$$

$$= 45 + 84 + 96 - (105 + 72 + 48) = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$$

ПРИМЕР 4. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Разложим определитель по первой строке, а затем применим правило треугольников.

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (1 \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - (3 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1)) +$$

$$+ 2 \cdot (3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot (-1) - (0 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 3)) +$$

$$+ 1 \cdot (3 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 0 - (0 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot 3)) =$$

$$= (-1 - 2 - 3) + 2 \cdot (3 - 6 - 2) + (6 - 4 + 9) = -6 - 10 + 11 = -5.$$

Свойства определителей

1. Определитель равен нулю, если
   а) какая-либо его строка (или столбец) состоит из одних нулей;
   б) две строки (два столбца) определителя равны или пропорциональны.
2. Определитель не меняется:
   а) при транспонировании;
   б) если к какой-либо его строке (или столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на произвольное число.
3. Общий множитель какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя.
4. При перестановке двух строк (двух столбцов) определитель меняет знак.
5. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей.

Применение этих свойств дает возможность сделать процедуру вычисления определителей высоких порядков менее трудоемкой за счет увеличения количества нулей в каком-либо столбце или строке (*метод зануления*).

ПРИМЕР 5. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 60 & 17 & 134 & 20 \\ 15 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}$.

Применяя свойство 2б, прибавим к 1-му столбцу 4-й столбец, умноженный на (–3). Это нужно для получения нулей в 1-м столбце.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 17 & 134 & 20 \\ 0 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по первому столбцу:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 17 & 134 & 20 \\ 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}.$$

Снова по свойству 2б прибавим ко второму столбцу первый столбец, умноженный на (–2). Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 17 & 100 & 20 \\ 43 & 20 & 5 \end{vmatrix}.$$

Разложим по первой строке:

$$\Delta = 8 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 100 & 20 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 8 \cdot (100 \cdot 5 - 20 \cdot 20) = 800.$$

ПРИМЕР 6. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Получим нули в третьем столбце. Для этого возьмем 4-ю строку и прибавим ее к 1-й и 3-й строкам. Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по 3-му столбцу:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Возьмем 2-ю строку, прибавим ее, умноженную на (–2), к 1-й строке и прибавим ее же, умноженную на (–1), к третьей строке. По свойству 2б определитель не изменится. Получим

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по 1-му столбцу. Получим

$$\Delta = -(-1) \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -(-5 - 0) = 5.$$

Контрольные вопросы

1. Какие матрицы можно складывать? Как сложить две матрицы? Как умножить матрицу на число?
2. При каком условии на размерности матриц их произведение определено? Как умножить матрицу на матрицу? Верно ли равенство $AB = BA$ для произвольных матриц подходящей размерности?
3. Как транспонировать матрицу?
4. Свойства операций над матрицами.
5. Как вычислить определители первого и второго порядков?
6. Что такое алгебраическое дополнение элемента матрицы? Как вычислить определитель произвольного порядка разложением по строке, разложением по столбцу?
7. Правило треугольников для определителей третьего порядка.
8. Свойства определителей.
9. Вычисление определителей произвольного порядка методом зануления.

Тестовые задания

1. Для матриц $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ найдите $A+B$, A^T, $-2A$, AB.

   Ответы:
   $$A+B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ 4 & 1 & -4\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix},\ -2A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -4\\ -4 & -2 & 4\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 6\\ -4 & 6 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$
2. Вычислите определитель матрицы A разложением по первой строке, разложением по второй строке, разложением по второму столбцу, по правилу треугольников, методом зануления.
   Ответ: 9.

1.3.2. Применение определителей

Обратная матрица и ее вычисление

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квадратная матрица E вида $\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$ называется *единичной* матрицей. Она обладает свойством единицы, то есть для любой квадратной матрицы A одинакового с E порядка справедливо $AE=EA=A$. Например,

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A и B – квадратные матрицы одного порядка. Матрица B называется *обратной* к матрице A, если $AB=BA=E$.

Например, для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ обратной будет матрица $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Действительно,

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+3 & 1-1\\ -6+6 & 3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E,$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+3 & -4+4\\ \frac{3}{2}-\frac{3}{2} & 3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Обратная к A матрица обозначается A^{-1}. Заметим, что не каждая квадратная матрица имеет обратную.

ТЕОРЕМА. *Для того, чтобы квадратная матрица имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.*

ТЕОРЕМА. *Если квадратная матрица имеет обратную, то только одну.*

Найти обратную матрицу можно по приведенному ниже алгоритму.

АЛГОРИТМ нахождения обратной матрицы.

1) Находим определитель Δ матрицы A. Если $\Delta=0$, то A^{-1} не существует. Если $\Delta\neq 0$, переходим к п. 2).
2) Вычисляем алгебраические дополнения A_{ij} для каждого элемента a_{ij} матрицы $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$ и составляем из них матрицу

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

3) Транспонируем полученную матрицу.

4) Умножаем полученную матрицу на число $\frac{1}{\Delta}$.

Полученная в результате вычислений матрица $\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$ является обратной для исходной матрицы A, то есть $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\,\widetilde{A}^T$.

ПРИМЕР 1. Найти A^{-1} для $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6 \neq 0.$

При вычислении Δ сначала прибавили к третьей строке первую, умноженную на (–1), а затем выполнили разложение по первому столбцу.

2) $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2,\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,\quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) $\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

4) $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 & 5/6 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/6 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$

Проверка.

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1/6 & -1/3 & 5/6\\ 1/3 & 1/3 & -1/3\\ -1/6 & 1/3 & 1/6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 2 & 2 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/6 & -1/3 & 5/6\\ 1/3 & 1/3 & -1/3\\ -1/6 & 1/3 & 1/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2.2. Системы линейных уравнений. Правило Крамера и матричный метод решения систем линейных уравнений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}\tag{1}$$

называется *системой линейных уравнений*.

Здесь $x_1,\ldots, x_n$ – неизвестные, $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ – заданные коэффициенты при неизвестных, $b_1, \ldots, b_m$ – заданные свободные члены.

Коэффициенты $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ можно записать в виде матрицы

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix},$$

которая называется *матрицей системы уравнений*. Неизвестные $x_1,\ldots, x_n$ и свободные члены $b_1, \ldots, b_m$ записываются в виде столбцов

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix} \text{ и } \bar{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \ldots\\ b_m\end{pmatrix},$$

которые называются *столбцом неизвестных* и *столбцом свободных членов*.

Используя эти обозначения и определения действий над матрицами, систему уравнений (1) можно записать в матричном виде $A\bar{x}=\bar{b}$, то есть

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \ldots\\ b_m\end{pmatrix},$$

или в векторном виде

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \ldots\\ a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\ \ldots\\ a_{m2}\end{pmatrix}+\ldots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \ldots\\ a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \ldots\\ b_m\end{pmatrix}.$$

Решением системы линейных уравнений называется такой набор значений неизвестных, то есть столбец $\bar{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \ldots \\ x_n^* \end{pmatrix}$, при подстановке которого в уравнения системы каждое уравнение превращается в верное равенство.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.

Если система уравнений не имеет ни одного решения, она называется *несовместной*.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет ровно одно решение, и *неопределенной*, если решений больше, чем одно.

Система уравнений называется *однородной*, если в столбце свободных членов все элементы нулевые. Если же в столбце свободных членов есть хотя бы один ненулевой элемент, система называется *неоднородной*.

Для выяснения вопроса о совместности системы линейных уравнений и нахождения ее решений разработан ряд методов. Мы изучим правило Крамера, матричный метод и метод Гаусса.

ПРАВИЛО КРАМЕРА

Пусть система $A\bar{x} = \bar{b}$ линейных уравнений имеет квадратную матрицу A, определитель Δ которой отличен от нуля. Тогда система $A\bar{x} = \bar{b}$ имеет единственное решение $\bar{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \ldots \\ x_n^* \end{pmatrix}$, которое может быть найдено по формулам Крамера

$$x_1^* = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2^* = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n^* = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Здесь Δ_j ($j = 1, \ldots, n$) – определители матриц, которые получаются из матрицы A заменой в ней j-го столбца на столбец свободных членов.

ПРИМЕР 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 \qquad + x_3 = 3. \end{cases}$$

Матрица этой системы квадратная и имеет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ее определитель был найден в примере 1:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, система уравнений имеет единственное решение. Найдем его по формулам Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12.$$

При вычислении определителей Δ_1, Δ_2, Δ_3 выполнены следующие действия:

Δ_1: к первому столбцу прибавили третий, умноженный на (–3), затем произвели разложение по третьей строке;

Δ_2 и Δ_3: к третьей строке прибавили первую, умноженную на (–1), затем выполнили разложение по первому столбцу.

Далее имеем

$$x_1^* = \frac{6}{6} = 1; \quad x_2^* = \frac{0}{6} = 0; \quad x_3^* = \frac{12}{6} = 2.$$

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД решения систем линейных уравнений.

Пусть система $A\,\overline{x} = \overline{b}$ *имеет квадратную матрицу* A, *определитель* Δ *которой отличен от нуля. Тогда система* $A\,\overline{x} = \overline{b}$ *имеет единственное решение* $\overline{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \dots \\ x_n^* \end{pmatrix}$, *которое может быть найдено по формуле* $\overline{x}^* = A^{-1}\overline{b}$.

Отметим, что A^{-1} существует, так как $\Delta \neq 0$.

ПРИМЕР 3. Решить систему уравнений из примера 2 матричным методом.

Решение.

Система уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ \quad\quad x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 \quad\quad + x_3 = 3. \end{cases}$ имеет единственное решение, как было доказано в примере 2.

Матрица этой системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеет обратную A^{-1}, которая была найдена в примере 1:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь матричным методом решения систем линейных уравнений, получим решение данной системы по формуле $\overline{x}^* = A^{-1}\overline{b}$:

$$\overline{x}^* = A^{-1}\overline{b} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1-8+15 \\ -2+8-6 \\ 1+8+3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ то есть } x_1^* = 1; \quad x_2^* = 0; \quad x_3^* = 2.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое обратная матрица? Может ли иметь обратную матрицу прямоугольная матрица, квадратная матрица с нулевым определителем?
2. Перечислите в порядке их выполнения действия по нахождению обратной матрицы.
3. Что называется решением системы уравнений? Какие системы уравнений называются совместными, несовместными, определенными, неопределенными, однородными, неоднородными?
4. Какие системы уравнений можно решить по правилу Крамера и матричным методом? Какие нельзя?
5. Как составляется определитель системы, решаемой по правилу Крамера? Как составляются вспомогательные определители? Как вычисляются значения неизвестных?
6. В чем заключается матричный метод решения системы линейных уравнений?

Тестовые задания

1. Проверьте, является ли матрица $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ обратной для матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & -1\\ -1 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$?

   Ответ: да.

2. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ найдите обратную матрицу.

   Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2/5 & 4/5 & 3/5\\ 1/5 & 3/5 & 1/5\\ 1/5 & -2/5 & 1/5\end{pmatrix}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0,\\ 2x_1-x_2+x_3=1,\\ 3x_1+x_2+x_3=3.\end{cases}$ по правилу Крамера и матричным методом.

   Ответ: $x_1=0, x_2=1, x_3=2.$

1.3.3. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Методом Гаусса можно решить любую систему линейных уравнений.

Изучение метода Гаусса начнем с рассмотрения частного случая, когда матрица системы квадратная и имеет треугольный вид.

Пусть дана система уравнений вида

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ \qquad a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \qquad\qquad a_{mn}x_n=b_m.\end{cases} \tag{1}$$

с треугольной матрицей

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

в которой элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} отличны от нуля, а все элементы в столбцах под ними равны нулю. Решение такой системы может быть легко найдено и будет единственным. Для его нахождения следует начать решать систему с последнего уравнения и затем переходить к решению последующих уравнений, двигаясь снизу вверх и подставляя в эти уравнения уже найденные ранее значения неизвестных.

Например, найдем решение системы

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3-2x_4=6,\\ \qquad 5x_2-2x_3+x_4=-5,\\ \qquad\qquad 3x_3-2x_4=8,\\ \qquad\qquad\qquad 7x_4=-7.\end{cases}$$

Решаем уравнения снизу вверх. Найдем x_4=–7/7=–1. Подставим результат в третье уравнение. $3x_3$+2=8, x_3=2. Перейдем ко второму уравнению. $5x_2$–4–1=–5, x_2=0. Из первого уравнения найдем x_1. $2x_1$–0+2+2=6, x_1=1. Таким образом, найдено единственное решение системы: $\overline{x}^*=(1,0,2,-1)$.

Перейдем к решению системы уравнений общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2}$$

Нельзя ли преобразовать эту систему к рассмотренному выше виду так, чтобы ее решения при этом не изменились?

Оказывается, можно. Любую систему линейных уравнений можно привести к треугольному виду (1) или к виду трапеции (5) (см. ниже) с помощью так называемых элементарных преобразований.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Элементарными преобразованиями* системы уравнений называются следующие преобразования:

- перестановка уравнений;
- изменение порядка следования переменных одинаково во всех уравнениях системы;
- умножение какого-либо уравнения на отличное от нуля число;
- замена какого-либо уравнения системы на его сумму с другим уравнением, предварительно умноженным на произвольное число.

В результате применения элементарных преобразований получается система уравнений, эквивалентная исходной. Последнее означает, что системы, исходная и полученная в результате преобразований, либо обе несовместны, либо каждое решение одной из них является решением другой.

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений основан на элементарных преобразованиях системы уравнений и позволяет установить, совместна система или нет, и в случае совместности найти все решения системы. Идея его состоит в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований.

Пусть в системе (2) $a_{11} \neq 0$, (если a_{11}=0, поменяем уравнения местами, поставив на первое место уравнение с ненулевым коэффициентом при x_1). Первое уравнение оставим без изменения. Остальные уравнения преобразуем следующим образом:

1) ко второму уравнению прибавим первое, умноженное на $(-a_{21}/a_{11})$,

2) к третьему уравнению прибавим первое, умноженное на $(-a_{31}/a_{11})$.

Аналогично поступим со всеми оставшимися уравнениями, то есть к каждому уравнению прибавим первое, умноженное на такое число, чтобы в результате сложения коэффициент при x_1 стал бы равным нулю.

Преобразованная таким образом система примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad a'_{32}x_2 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \tag{3}$$

В системе (3) переменная x_1 входит только в первое уравнение. Из остальных уравнений переменная x_1 исключена.

Рассмотрим урезанную систему уравнений, то есть систему (3) без первого уравнения. Применим к ней элементарные преобразования таким же образом, как выше к системе (2), и исключим неизвестную x_2 из всех уравнений системы (3), начиная с третьего. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n = b''_3, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a''_{m3}x_3 + \ldots + a''_{mn}x_n = b''_m. \end{cases} \tag{4}$$

Далее процесс будем продолжать до тех пор, пока не получится система уравнений треугольного вида, то есть система вода (1), или система вида трапеции:

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 + \ldots + \tilde{a}_{1k} + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1, \\ \qquad \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 + \ldots + \tilde{a}_{2k} + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \tilde{a}_{kk} + \ldots + \tilde{a}_{kn}x_n = \tilde{b}_k, \\ \qquad\qquad 0 = 0, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots \\ \qquad\qquad 0 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Если на некотором этапе элементарных преобразований в каком-либо уравнении все коэффициенты при неизвестных стали равны нулю, а правая часть осталась ненулевой, то есть получилось равенство $0=b_k$ ($b_k \neq 0$), то это означает, что система несовместна.

Действительно, ни при каких значениях переменных x_1, x_2, …, x_n уравнение $0=b_k$ не станет верным равенством, и, значит, система решений не имеет.

В случае приведения системы (2) к виду (5) имеем систему с бесконечным множеством решений. Убедимся в этом на рассматриваемых ниже примерах.

ПРИМЕР 1.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Первое уравнение, умноженное последовательно на (–2), 3 и 1, сложим соответственно со вторым, третьим и четвертым уравнениями системы:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ 13x_2 - 7x_3 + 4x_4 = -3, \\ -17x_2 + 11x_3 - 2x_4 = 9, \\ -4x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Поставим четвертое уравнение перед вторым и переставим неизвестную x_4 на второе место:

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_4 - 4x_2 + 4x_3 = 4, \\ 4x_4 + 13x_2 - 7x_3 = -3, \\ -2x_4 - 17x_2 + 11x_3 = 9. \end{cases}$$

Второе уравнение, умноженное последовательно на (–2) и 1, прибавим соответственно к третьему и четвертому уравнениям:

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_4 - 4x_2 + 4x_3 = 4, \\ 21x_2 - 15x_3 = -11, \\ -21x_2 + 15x_3 = 13. \end{cases}$$

Прибавим третье уравнение к четвертому:

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_4 - 4x_2 + 4x_3 = 4, \\ 21x_2 - 15x_3 = -11, \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Получили неверное равенство 0 = 2, следовательно, система несовместна.

ПРИМЕР 2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25. \end{cases}$$

Первое уравнение, умноженное последовательно на (–1) и (–3), прибавим соответственно ко второму и третьему уравнениям системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ -12x_2 - 16x_3 = 52. \end{cases}$$

Третье уравнение разделим на (– 4):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_2 + 4x_3 = -13. \end{cases}$$

Второе уравнение прибавим к третьему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение. Решаем снизу вверх:

$$x_3 = -1,$$

$$-3x_2 + 2 = 11, \quad -3x_2 = 9, \quad x_2 = -3,$$

$$x_1 - 6 - 5 = -9, \quad x_1 = 2.$$

Ответ: $\bar{x}^* = (2; -3; -1)$.

ПРИМЕР 3.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 8. \end{cases}$$

Поставим третье уравнение на первое место:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 8. \end{cases}$$

Первое уравнение, умноженное последовательно на (–4), (–2) и (–3), прибавим соответственно ко второму, третьему и четвертому уравнениям системы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_2 + 5x_3 - 13x_4 = -11, \\ 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 = -1, \\ 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 = -1. \end{cases}$$

Поменяем местами x_2 и x_3:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 2x_2 + 3x_4 = 3, \\ 5x_3 + 9x_2 - 13x_4 = -11, \\ 5x_3 + 7x_2 - 11x_4 = -1, \\ 5x_3 + 7x_2 - 11x_4 = -1. \end{cases}$$

Второе уравнение, умноженное на (–1), прибавим к третьему и четвертому уравнениям:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 2x_2 + 3x_4 = 3, \\ 5x_3 + 9x_2 - 13x_4 = -11, \\ -2x_2 + 2x_4 = 10, \\ -2x_2 + 2x_4 = 10. \end{cases}$$

К четвертому уравнению прибавим третье, умноженное на (–1):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 2x_2 + 3x_4 = 3, \\ 5x_3 + 9x_2 - 13x_4 = -11, \\ -2x_2 + 2x_4 = 10, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Получили систему вида трапеции (5). В этой системе три уравнения. Оставим в левой части три неизвестных x_1, x_3 и x_2, а оставшуюся неизвестную x_4 перенесем в правую часть системы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 2x_2 = 3 - 3x_4, \\ 5x_3 + 9x_2 = -11 + 13x_4, \\ -2x_2 = 10 - 2x_4, \\ 0 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Если придать x_4 какое-либо числовое значение, то получится система вида (1), которая будет иметь единственное решение.

Например, дадим x_4 значение $x_4 = 0$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 2x_2 = 3, \\ 5x_3 + 9x_2 = -11, \\ -2x_2 = 10. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$x_2 = 10/(-2) = -5,$$
$$5x_3 - 45 = -11, \quad x_3 = 34/5,$$
$$x_1 - 68/5 + 10 = 3, \quad x_1 = 33/5.$$

Имеем решение $\bar{x}^* = (33/5; -5; 34/5; 0)$.

Но если мы придадим x_4 какое-либо другое значение, то снова сумеем получить решение системы, но уже другое. Таким образом можно получить бесконечно много решений системы уравнений, так как x_4 может принимать бесконечно много различных значений.

Следовательно, система имеет бесконечно много решений. Их все можно описать одной формулой, которая называется *общим решением* системы уравнений. Для получения общего решения решим систему (6) с произвольным значением переменной $x_4 = c$.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 2x_2 = 3 - 3c, \\ 5x_3 + 9x_2 = -11 + 13c, \\ -2x_2 = 10 - 2c. \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{10 - 2c}{-2} = c - 5;$$

$$5x_3 + 9(c - 5) = -11 + 13c, \quad 5x_3 = 4c + 34, \quad x_3 = \frac{4c + 34}{5};$$

$$x_1 - 2\cdot\frac{4c+34}{5} - 2(c-5) = 3-3c, \quad x_1 = \frac{8c+68}{5} + 2c - 10 + 3 - 3c,$$

$$x_1 = \frac{3c+33}{5}.$$

Общее решение $\overline{x}^* = \left(\frac{3c+33}{5}; c-5; \frac{4c+34}{5}; c\right)$

Вернемся к изложению метода Гаусса и рассмотрим снова систему (5). Появление системы такого вида означает, что исходная система имеет бесконечно много решений.

Поступая в общем случае так же, как в примере 3, оставим в левой части столько неизвестных, сколько осталось уравнений в системе, а остальные неизвестные перенесем в правую часть. Переменные (неизвестные), оставшиеся слева, называются *базисными переменными*. Переменные (неизвестные), перенесенные направо, – *свободными*.

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1k}x_k = -\tilde{a}_{1k+1}x_{k+1} - \ldots - \tilde{a}_{1n}x_n + \tilde{b}_1, \\ \tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2k}x_k = -\tilde{a}_{2k+1}x_{k+1} - \ldots - \tilde{a}_{2n}x_n + \tilde{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{a}_{k1}x_1 + \tilde{a}_{k2}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{kk}x_k = \tilde{a}_{kk+1}x_{k+1} - \ldots - \tilde{a}_{kn}x_n + \tilde{b}_k. \end{cases}$$

Имеем k базисных переменных и $n–k$ свободных. Придавая свободным переменным произвольные значения $x_{k+1}=c_1$, …, $x_n=c_{n-k}$ и, решая последнюю систему относительно неизвестных x_1, …, x_k, получим общее решение исходной системы.

Контрольные вопросы

1. Какие преобразования системы уравнений называются элементарными?
2. К какому виду следует стремиться привести систему уравнений при ее решении методом Гаусса?
3. Как получить решение системы, приведенной к треугольному виду, к виду трапеции?

Тестовые задания

Определите, сколько решений имеет система уравнений, найдите эти решения:

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - 3x_3 = -2, \\ x_3 = 1. \end{cases}$

   Ответ: единственное решение $\overline{x}^* = (2, 1, 1)$.

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - 3x_3 = -2, \\ 0 = 1. \end{cases}$

   Ответ: решений нет.

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - 3x_3 = -2, \\ 0 = 0. \end{cases}$

   Ответ: бесконечно много решений. Общее решение $\overline{x}^* = (5c-3; 3c-2; c)$.

4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = -2, \\ 0 = 0. \end{cases}$

   Ответ: бесконечно много решений. Общее решение $\overline{x}^* = (5c_1 - c_2 - 3; 3c_1 - c_2 - 2; c_1; c_2)$.

Следующие системы уравнений решите методом Гаусса:

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2.$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 \quad\quad = 3. \end{cases}$

Ответ: решений нет.

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 \quad\quad + x_4 = 1. \end{cases}$

Ответ: бесконечно много решений. Общее решение $\overline{x}^* = \left(-5c_1 - 12c_2 - 1; 3c_1 + 7c_2 - 1; c_1; c_2\right)$.

1.3.4. Векторные пространства

Пространство R^n

Пусть n – фиксированное натуральное число, R – множество вещественных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Упорядоченный набор $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из n вещественных чисел называется *n-мерным вектором* $\overline{a}$, а сами числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – *компонентами*, или *координатами вектора* $\overline{a}$.

Два вектора $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называются равными, если равны их соответствующие координаты, то есть $a_i = b_i$, $(i = 1, \ldots, n)$.

n-мерные векторы можно складывать и умножать на вещественные числа: если $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ и α – вещественное число, то

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

$$\alpha\overline{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n).$$

Множество всевозможных n-мерных векторов, для которых определены указанным образом операции сложения и умножения на число, называется *n-мерным векторным пространством* и обозначается R^n. Частными случаями пространства R^n являются R^2 (n=2) и R^3 (n=3) – множества двумерных и трехмерных векторов. $R^1 = R$ – множество вещественных чисел.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для n-мерных векторов кроме записи в виде строки $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ возможна запись в виде столбца $\overline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$. Мы будем использовать ту или иную форму записи в зависимости от удобства ее применения.

Линейная зависимость векторов

Рассмотрим некоторую систему векторов пространства R^n:

$$\overline{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),$$
$$\overline{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$\overline{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}).$$

Вектор $\overline{b}$ называется *линейной комбинацией* векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_k$, если существуют такие вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, что

$$\overline{b} = \lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_k \overline{a}_k.$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ называются *коэффициентами* этой линейной комбинации.

Рассматривая различные наборы коэффициентов, мы будем получать различные линейные комбинации векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_k$.

В частности, если взять $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, мы получим нулевой вектор $\overline{b}$, то есть $\overline{b} = (0, 0, \ldots, 0) = \overline{0}$. Очевидно, этот результат не зависит от того, какова была система векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_k$.

Важным является следующий вопрос: *можно ли*, имея систему векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_k$, подобрать так коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, чтобы линейная комбинация $\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_k \overline{a}_k$ равнялась $\overline{0}$, а среди ее коэффициентов был хотя бы один, отличный от нуля?

В зависимости от ответа на этот вопрос все системы векторов делятся на две группы: линейно зависимые и линейно независимые.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_k$ называется *линейно зависимой*, если существует линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, в которой хотя бы один коэффициент отличен от нуля.

Система векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_k$ называется *линейно независимой*, если нулевую линейную комбинацию этих векторов можно получить *только* при нулевых значениях *всех* коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Основные утверждения о линейно зависимых системах.

1) Если система содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.
2) Если система содержит два равных вектора, то она линейно зависима.
3) Если какая-то часть системы (подсистема) линейно зависима, то и вся система линейно зависима.
4) Любая часть линейно-независимой системы векторов линейно независима.

Как проверить, является ли данная система векторов линейно зависимой или нет?

Чтобы ответить на этот вопрос, используем определение линейно зависимой (линейно независимой) системы. Составим линейную комбинацию заданных векторов с неопределенными коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ и приравняем ее к нулевому вектору. Затем, переписав полученное векторное уравнение в координатной форме, решим полученную систему уравнений относительно неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Эта система уравнений, очевидно, будет иметь решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$=0. Если это решение окажется единственным, значит, исходная система векторов линейно зависима. Если же окажется, что система уравнений имеет бесконечно много решений, то есть кроме нулевого решения у нее есть и ненулевые решения, то исходная система векторов линейно зависима.

ПРИМЕР 1.

Выяснить, является ли система векторов $\overline{a}_1 = (1; 2; 0; -1)$, $\overline{a}_2 = (-2; 1; 1; 0)$, $\overline{a}_3 = (-1; 0; 1; -1)$ линейно зависимой или линейно независимой.

РЕШЕНИЕ. Составим нулевую линейную комбинацию

$\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \lambda_3 \overline{a}_3 = \overline{0}$. Перепишем ее в виде

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выполнив действия умножения векторов на числа и сложения векторов, получим равенство

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 0 \\ 0 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ -\lambda_1 + 0 - \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое справедливо, если

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \qquad = 0, \\ \qquad \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ -\lambda_1 \qquad - \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Получили однородную систему уравнений вида $A\overline{x} = \overline{0}$ с матрицей A, столбцами которой являются координаты векторов системы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$.

Найдем λ_1, λ_2, λ_3 решив эту систему уравнений методом Гаусса. Первое уравнение, умноженное последовательно на (–2) и 1, прибавим соответственно ко второму и четвертому уравнениям системы:

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ 5\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ -2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Поменяем местами второе и третье уравнения, а четвертое разделим на (–2):

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 5\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение, умноженное последовательно на (–5) и (–1), прибавим соответственно к третьему и четвертому уравнениям:

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ -3\lambda_3 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= 0, \\ \lambda_2 &= 0, \\ \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Мы получили единственное решение системы уравнений: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Следовательно, нулевая линейная комбинация векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ может быть получена *только* при нулевых значениях коэффициентов λ_1, λ_2, λ_3, а это означает, что векторы образуют линейно независимую систему.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вывод о линейной независимости системы векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ сделан на основании того факта, что система уравнений $A\overline{x} = \overline{0}$ с матрицей A, столбцами которой являются векторы системы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, имеет единственное решение.

ПРИМЕР 2. Проверить на линейную зависимость систему векторов
$\overline{a}_1 = (1; 2; -1)$, $\overline{a}_2 = (-2; 0; 1)$, $\overline{a}_3 = (0; 4; -1)$, $\overline{a}_4 = (4; 0; -2)$.

РЕШЕНИЕ. Составим нулевую линейную комбинацию
$\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \lambda_3 \overline{a}_3 + \lambda_4 \overline{a}_4 = \overline{0}$. Найдем ее коэффициенты.

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}\lambda_1-2\lambda_2 \qquad +4\lambda_4=0,\\ 2\lambda_1 \qquad +4\lambda_3 \qquad =0,\\ -\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-2\lambda_4=0.\end{cases}$$

Первое уравнение, умноженное последовательно на (–2) и 1, прибавим соответственно ко второму и третьему уравнениям системы:

$$\begin{cases}\lambda_1-2\lambda_2 \qquad +4\lambda_4=0,\\ \quad 4\lambda_2+4\lambda_3-8\lambda_4=0,\\ \quad -\lambda_2-\lambda_3+2\lambda_4=0.\end{cases}$$

Разделим второе уравнение на 4:

$$\begin{cases}\lambda_1-2\lambda_2 \qquad +4\lambda_4=0,\\ \quad \lambda_2+\lambda_3-2\lambda_4=0,\\ \quad -\lambda_2-\lambda_3+2\lambda_4=0.\end{cases}$$

Второе уравнение прибавим к третьему:

$$\begin{cases}\lambda_1-2\lambda_2 \qquad +4\lambda_4=0,\\ \quad \lambda_2+\lambda_3-2\lambda_4=0,\\ \qquad 0=0.\end{cases}$$

Получена система вида трапеции, содержащая два уравнения и четыре неизвестных. Она имеет бесконечно много решений. Найдем одно из них, отличное от нулевого.

$$\begin{cases}\lambda_1-2\lambda_2= \quad -4\lambda_4,\\ \quad \lambda_2=-\lambda_3+2\lambda_4.\end{cases} \tag{1}$$

Поскольку свободным переменным λ_3 и λ_4 можно придавать любые значения, Дадим им ненулевые значения λ_3=1 и λ_4=1. Получим

$$\begin{cases}\lambda_1-2\lambda_2=-4, \quad \lambda_1-2=-4, \quad \lambda_1=-2.\\ \quad \lambda_2=1.\end{cases}$$

Имеем λ_1=–2, λ_2=1, λ_3=1, λ_4=1.

Мы нашли линейную комбинацию $-2\overline{a}_1+\overline{a}_2+\overline{a}_3+\overline{a}_4=\overline{0}$, равную нулевому вектору, в которой есть ненулевые коэффициенты. Следовательно, исходная система векторов линейно зависима.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Решая систему (1), мы, конечно, могли дать свободным переменным нулевые значения, то есть $\lambda_3=\lambda_4$=0. Тогда получили бы $\lambda_1=\lambda_2$=0, то есть нулевые значения коэффициентов в линейной комбинации $0\cdot\overline{a}_1+0\cdot\overline{a}_2+0\cdot\overline{a}_3+0\cdot\overline{a}_4=\overline{0}$. Но поскольку *не только* такая линейная комбинация равна нулевому вектору, а есть еще и другие нулевые линейные комбинации, в частности, найденная выше $-2\overline{a}_1+\overline{a}_2+\overline{a}_3+\overline{a}_4=\overline{0}$, то система векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, $\overline{a}_4$ линейно зависима.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вывод о линейной зависимости системы векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, $\overline{a}_4$ сделан на основании того факта, что система уравнений $A\overline{x}=\overline{0}$ с матрицей *A*, столбцами которой являются векторы системы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, $\overline{a}_4$ имеет бесконечно много решений.

Если матрица *A*, столбцами которой являются векторы исследуемой системы векторов, является квадратной, то вопрос о количестве решений системы уравнений $A\overline{x}=\overline{0}$ можно решить, вычислив определитель Δ матрицы A: если $\Delta \neq 0$, решение единственное, если же $\Delta = 0$, то решений бесконечно много. Поэтому с учетом замечаний, сделанных при решении примеров 1 и 2, получаем простой способ проверки линейной независимости (линейной зависимости) системы k-мерных векторов, содержащей ровно k векторов.

ПРИЗНАК линейной независимости.

Система k-мерных векторов, содержащая ровно k векторов, линейно независима тогда и только тогда, когда определитель матрицы, столбцами которой являются векторы данной системы, отличен от нуля.

ПРИМЕР 3. Проверить на линейную зависимость систему векторов $\bar{a}_1 = (1; 2; 0)$, $\bar{a}_2 = (-1; 1; 2)$, $\bar{a}_3 = (0; 1; 2)$.

РЕШЕНИЕ.

Составим матрицу A, столбцами которой являются векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, и найдем ее определитель Δ:,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - (0 - 4 + 2) = 2 + 2 = 4 \neq 0.$$

Система векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ линейно независима.

Базис и ранг системы векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Базисом системы* векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …, $\bar{a}_k$ называется подсистема этой системы векторов, обладающая двумя свойствами:

1) эта подсистема линейно независима,
2) любой вектор системы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …, $\bar{a}_k$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой подсистемы.

ПРИМЕР 4. Дана система векторов $\bar{a}_1 = (1; 2; -1)$, $\bar{a}_2 = (-2; 0; 1)$, $\bar{a}_3 = (0; 4; -1)$, $\bar{a}_4 = (4; 0; -2)$. Доказать, что векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ образуют базис этой системы.

РЕШЕНИЕ. Проверим выполнение двух свойств из определения базиса.

1) Докажем, что подсистема $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ линейно независима:

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 = \bar{0},$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 = 0, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $\lambda_1 = 0$, тогда из первого и из третьего следует, что $\lambda_2 = 0$. Линейная независимость доказана.

Докажем, что векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ можно представить в виде линейных комбинаций векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$.

Очевидно,

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_1 + 0 \cdot \bar{a}_2,$$
$$\bar{a}_2 = 0 \cdot \bar{a}_1 + \bar{a}_2.$$

Найдем представления $\bar{a}_3$ и $\bar{a}_4$ через $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$.

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 = \bar{a}_3,$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 \qquad = 4, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = -1. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $\lambda_1 = 2$. Найдем λ_2, подставив λ_1 в первое и третье уравнения.

$$\begin{cases} 2 - 2\lambda_2 = 0, \\ -2 + \lambda_2 = -1. \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_2 = 1, \\ \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Получили $\bar{a}_3 = 2 \cdot \bar{a}_1 - 2 \cdot \bar{a}_2$.

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 = \bar{a}_4,$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = 4, \\ 2\lambda_1 \qquad = 0, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = -2. \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 \qquad = 0, \\ -2\lambda_2 = 4, \\ \lambda_2 = -2. \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = -2. \end{cases}$$

Получили $\bar{a}_4 = 0 \cdot \bar{a}_1 - 2 \cdot \bar{a}_2$.

Оба свойства из определения базиса выполнены, следовательно, векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ образуют базис системы векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$.

Перечислим ряд свойств, вытекающих из определения базиса.

1) Каждая система векторов, имеющая хотя бы один ненулевой вектор, обладает базисом.
2) Все базисы данной системы векторов состоят из одинакового количества векторов.
3) Базис системы содержит максимальное количество линейно независимых векторов этой системы.

Второе свойство о количестве векторов в базисе является очень важным и позволяет ввести еще одно понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Рангом* системы векторов называется количество векторов в каком-либо базисе этой системы векторов.

Так, например, ранг системы векторов из примера 4 равен 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть система векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …, $\bar{a}_k$ имеет базис $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …, $\bar{a}_r$. *Координатами* вектора $\bar{a}_j$ в базисе $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …, $\bar{a}_r$ называются коэффициенты в разложении вектора $\bar{a}_j$ по базису $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …, $\bar{a}_r$.

В разных базисах один и тот же вектор имеет разные координаты.

ПРИМЕР 5. Вернемся к примеру 4. Было доказано, что векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ являются базисом системы векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$, причем имеет место разложение по базису

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_1 + 0 \cdot \bar{a}_2, \quad \bar{a}_3 = 2 \cdot \bar{a}_1 + \bar{a}_2,$$

$$\overline{a}_2 = 0\cdot\overline{a}_1 + \overline{a}_2, \quad \overline{a}_4 = 0\cdot\overline{a}_1 - 2\cdot\overline{a}_2.$$

Из этих разложений следует, что векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, $\overline{a}_4$ в базисе $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ имеют координаты

$$\overline{a}_1 = (1;\,0), \qquad \overline{a}_3 = (2;\,1),$$
$$\overline{a}_2 = (0;\,1), \qquad \overline{a}_4 = (0;\,-2).$$

Базис пространства R^n

В векторном пространстве R^n тоже можно ввести понятие базиса. Оно вводится аналогично понятию базиса системы векторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Базисом пространства* R^n называется система векторов этого пространства, обладающая двумя свойствами:

1) эта система линейно независима,
2) любой вектор пространства R^n может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы.

Свойства базисов пространства R^n.

1) В пространстве R^n существует бесконечно много различных базисов.
2) Все базисы пространства R^n имеют одинаковое количество векторов.
3) В пространстве R^n любая линейно независимая система векторов, содержащая ровно n векторов, является базисом.

ПРИМЕР 6. Доказать, что система векторов

$$\begin{aligned}
&\overline{e}_1 = (1;\,0;\,\ldots,\,0),\\
&\overline{e}_2 = (0;\,1;\,\ldots,\,0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\overline{e}_n = (0;\,0;\,\ldots,\,1)
\end{aligned}$$

является базисом пространства R^n.

В самом деле, эта система линейно независима, так как определитель матрицы, столбцами которой являются векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, …, $\overline{e}_n$, не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Кроме того, для любого вектора $\overline{x} = (x_1;\,x_2;\,\ldots,\,x_n)$ пространства R^n имеет место очевидное равенство:

$$\overline{x} = (x_1;\,x_2;\,\ldots,\,x_n) = x_1\,(1;\,0;\,\ldots,\,0) + x_2\,(0;\,1;\,\ldots,\,0) + x_n\,(0;\,0;\,\ldots,\,1) = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n.$$

Таким образом, мы доказали, что в пространстве R^n есть базис $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, …, $\overline{e}_n$, состоящий из n векторов. Значит, все остальные базисы содержат по n векторов (свойство 2) и, следовательно, справедливо свойство 3 базисов пространства R^n, которое часто используют в качестве определения базиса пространства R^n.

Координатами вектора $\overline{x}$ в базисе $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_n$ пространства R^n называются коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ в разложении $\overline{x} = \lambda_1\,\overline{a}_1 + \lambda_2\,\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n\,\overline{a}_n$ вектора $\overline{x}$ по базису $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_n$.

ЗАДАЧА. Доказать, что векторы $\overline{a}_1 = (1;\,2;\,-1)$, $\overline{a}_2 = (2;\,0;\,2)$, $\overline{a}_3 = (1;\,2;\,1)$ образуют базис пространства R^3 и найти координаты вектора $\overline{b} = (-1;\,-2;\,-3)$ в этом базисе.

РЕШЕНИЕ. $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ – система из трех трехмерных векторов. Следовательно, для доказательства того, что она является базисом пространства R^3, достаточно доказать ее линейную независимость.

Составим и вычислим определитель матрицы, столбцами которой являются векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 4 - (0 + 4 + 4) = -8 \neq 0.$$

Определитель $\Delta \neq 0$, следовательно, $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ – линейно независимая система из трех трехмерных векторов, то есть базис пространства R^3.

Для нахождения координат вектора $\overline{b}$ в этом базисе разложим вектор $\overline{b}$ по базису $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Найдем λ_1, λ_2, λ_3 – координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе.

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = -1, \\ 2\lambda_1 \qquad + 2\lambda_3 = -2, \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = -3. \end{cases}$$

Эта система имеет определитель $\Delta = -8 \neq 0$. Следовательно, ее можно решать как методом Гаусса, так и по правилу Крамера. Используем правило Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 12 - 4 - (0 - 4 - 4) = -8, \quad \lambda_1 = \frac{-8}{-8} = 1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 6 - (2 - 2 - 6) = 0, \quad \lambda_2 = \frac{0}{-8} = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 4 - (0 - 12 - 4) = 16, \quad \lambda_3 = \frac{16}{-8} = -2.$$

Вектор $\overline{b}$ в базисе $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ имеет координаты: $\overline{b} = (1; 0; -2)$.

1.3.5. Ранг матрицы. Исследование систем линейных уравнений

Понятие ранга матрицы

Пусть дана произвольная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Мы можем рассматривать эту матрицу как систему векторов-строк или как систему векторов-столбцов. В обоих случаях, используя понятие ранга системы векторов, мы можем определить понятие ранга матрицы по строкам или по столбцам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Рангом матрицы по строкам* называется ранг системы ее векторов-строк, то есть максимальное количество ее линейно независимых строк. *Рангом матрицы по столбцам* называется ранг системы ее векторов-столбцов, то есть максимальное количество ее линейно независимых столбцов.

ТЕОРЕМА. *Ранги матрицы по строкам и по столбцам совпадают*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число r, равное рангу матрицы A по строкам и рангу матрицы A по столбцам, называется *рангом матрицы* A.

Таким образом, ранг матрицы равен максимальному количеству ее линейно независимых строк или столбцов.

Свойства ранга матрицы.

1) Ранг матрицы не меняется при транспонировании матрицы.
2) Если матрица A имеет размерность $m \times n$, то ее ранг $r \leq min\{m,n\}$.
3) Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях, то есть при:
   – перестановке ее строк или столбцов;
   – умножении любой строки (столбца) на отличное от нуля число;
   – замене строки (столбца) на ее сумму с другой строкой (столбцом), предварительно умноженной на произвольное число.

Пусть матрица A имеет треугольный вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

причем все диагональные элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} отличны от нуля. Тогда ранг r матрицы равен ее порядку, то есть $r=n$, так как в этом случае все строки матрицы линейно независимы (последнее легко проверить, вычислив определитель Δ матрицы A, который будет равен $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \neq 0$).

Если матрица A имеет вид трапеции

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

то ее ранг равен r – количеству ненулевых строк. В этом легко убедиться, проверив линейную независимость системы векторов, координаты которых стоят в ненулевых строках матрицы. Способ проверки использован в 4.2. (пример 1). Тот факт, что ненулевые строки составляют *максимальное* количество линейно независимых строк матрицы, очевиден, так как все остальные строки нулевые, и их наличие в какой-либо системе строк матрицы означает линейную зависимость такой системы.

Алгоритм нахождения ранга матрицы

Пусть дана произвольная матрица A. Поскольку ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях (см. 5.1. свойства ранга матрицы), используем для его нахождения метод Гаусса, состоящий в приведении матрицы A к треугольному виду или виду трапеции с помощью элементарных преобразований.

ПРИМЕР 1. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 3 & -6 & 4 & -3 & 2\\ 1 & -2 & 2 & 5 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 3 & -6 & 4 & -3 & 2\\ 1 & -2 & 2 & 5 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

С матрицей A были произведены следующие преобразования:

1) поменяли местами первую и вторую строки;
2) первую строку, умноженную последовательно на (–2), (–3), (–1), прибавили соответственно ко второй, третьей и четвертой строкам;
3) вторую строку, умноженную на (–1), прибавили к третьей и четвертой строкам.

В результате преобразований получили матрицу вида трапеции, которая содержит две ненулевые строки и, следовательно, имеет ранг, равный двум. Значит, ранг матрицы A тоже равен 2.

Исследование систем линейных уравнений

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}, \qquad (1)$$

имеющая матрицу системы

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix},$$

столбец неизвестных $\overline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}$ и столбец свободных членов $\overline{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \ldots\\ b_m\end{pmatrix}$.

Решая такую систему методом Гаусса, ранее мы видели, что система (1) может иметь одно решение, бесконечно много решений или быть несовместной, то есть не иметь ни одного решения. От чего же зависит совместность системы (1) и количество ее решений?

Выяснение вопроса о совместности системы линейных уравнений и количестве ее решений называется исследованием системы уравнений. Ответ на этот вопрос дает теорема Кронекера-Капелли. Для того, чтобы сформулировать эту теорему, введем определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрица $\overline{A}$, полученная из матрицы A системы линейных уравнений (1) добавлением к ней столбца $\overline{b}$ свободных членов, называется *расширенной матрицей* системы (1).

Расширенная матрица системы (1) имеет вид

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}.$$

Заметим, что если матрица A имеет ранг r, то по определению ранга по столбцам она имеет r линейно независимых столбцов. Матрица $\overline{A}$ содержит все столбцы матрицы A и еще один дополнительный столбец $\overline{b}$. Значит, количества ее линейно независимых столбцов либо такое же, как у матрицы А, либо ровно на один больше. Следовательно, $\overline{A}$ будет иметь ранг либо равный r, либо равный $r+1$.

ТЕОРЕМА Кронекера-Капелли (критерий совместности системы линейных уравнений).

Для того, чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A этой системы равнялся рангу ее расширенной матрицы $\overline{A}$.

ТЕОРЕМА (о количестве решений системы линейных уравнений).

Если ранги матриц A и $\overline{A}$ *совместной системы линейных уравнений, равные числу r, равны числу неизвестных системы, то система имеет единственное решение. Если же r меньше числа неизвестных, то система линейных уравнений имеет бесконечно много решений.*

Рассмотрим далее примеры применения теоремы Кронекера-Капелли к исследованию системы линейных уравнений.

ПРИМЕР 1. Исследовать на совместность систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Матрицы A и $\overline{A}$ этой системы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решая систему методом Гаусса, получаем систему (см. 3. пример 1)

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_4 - 4x_2 + 4x_3 = 4, \\ 21x_2 - 15x_3 = -11, \\ 0 = 2. \end{cases}$$

с матрицами

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 21 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 21 & -15 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A' равен 3, ранг матрицы $\overline{A'}$ равен 4.

Так как при элементарных преобразованиях, используемых в методе Гаусса, ранг матрицы не меняется, то ранги матриц A и $\overline{A}$ равны 3 и 4 соответственно, система уравнений несовместна по теореме Кронекера-Капелли.

ПРИМЕР 2. Исследовать на совместность систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25. \end{cases}$$

Матрицы A и $\overline{A}$ этой системы имеют вид

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 1 & -1 & 3\\ 3 & -6 & -1\end{pmatrix},\quad \overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & -9\\ 1 & -1 & 3 & 2\\ 3 & -6 & -1 & 25\end{pmatrix}.$$

Решая систему методом Гаусса, получаем систему (см. 3. пример 2)

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=-9,\\ \quad -3x_2-2x_3=11,\\ \qquad\qquad 2x_3=-2.\end{cases}$$

с матрицами

$$A'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad \overline{A'}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & -9\\ 0 & -3 & -2 & 11\\ 0 & 0 & 2 & -2\end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A' равен 3, ранг матрицы $\overline{A'}$ равен 3. Следовательно, ранги матриц A и $\overline{A}$ тоже равны 3, система совместна, а так как количество неизвестных тоже равно трем, то система имеет единственное решение.

ПРИМЕР 3. Исследовать на совместность систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3-x_4=1,\\ 2x_1+3x_2+x_3-5x_4=5,\\ x_1-2x_2-2x_3+3x_4=3,\\ 3x_1+x_2-x_3-2x_4=8.\end{cases}$$

Матрицы A и $\overline{A}$ этой системы имеют вид

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -3 & -1\\ 2 & 3 & 1 & -5\\ 1 & -2 & -2 & 3\\ 3 & 1 & -1 & -2\end{pmatrix},\quad \overline{A}=\begin{pmatrix}4 & 1 & -3 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 1 & -5 & 5\\ 1 & -2 & -2 & 3 & 3\\ 3 & 1 & -1 & -2 & 8\end{pmatrix}.$$

Решая систему методом Гаусса, получаем систему (см. 3. пример 3)

$$\begin{cases} x_1-2x_3-2x_2+3x_4=3,\\ \quad 5x_3+9x_2-13x_4=-11,\\ \qquad -2x_2+2x_4=10,\\ \qquad\qquad 0=0.\end{cases}$$

с матрицами

$$A'=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 3\\ 0 & 5 & 9 & -13\\ 0 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \overline{A'}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 3 & 3\\ 0 & 5 & 9 & -13 & -11\\ 0 & 0 & -2 & 2 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A' равен 3, ранг матрицы $\overline{A'}$ равен 3. Следовательно, ранги матриц A и $\overline{A}$ тоже равны 3, система совместна, а так как количество неизвестных равно $4 \neq 3$, то система имеет бесконечно много решений.

Контрольные вопросы

1. Что такое n-мерный вектор?
2. Как определены операции сложения и умножения на число для n-мерных векторов?
3. Что такое линейная комбинация векторов?
4. В чем отличие линейно независимых систем векторов от линейно зависимых?
5. Как исследовать на линейную зависимость систему k-мерных векторов, содержащую
   – ровно k векторов,
   – произвольное количество векторов?
6. Дайте определения базиса системы векторов, базиса пространства R^n. Что общего в этих определениях? В чем их отличие?
7. Что общее у различных базисов одной и той же системы векторов?
8. Что общее у различных базисов пространства R^n?
9. Дайте определение координат вектора в данном базисе. Может ли один и тот же n-мерный вектор $\overline{a}_1$ иметь разное количество координат в некотором базисе пространства R^n и в каком-либо базисе системы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$?
10. Как проверить, является ли система, содержащая 3 трехмерных вектора базисом пространства R^3? Система, содержащая 4 четырехмерных вектора – базисом пространства R^4?
11. Как найти координаты вектора $\overline{x}$ пространства R^n в некотором заданном базисе этого пространства?
12. Дайте определение ранга матрицы. Чему равен ранг треугольной матрицы, матрицы вида трапеции?
13. Как вычислить ранг матрицы?
14. В какой теореме сформулировано необходимое и достаточное условие совместности системы линейных уравнений? Что это за условие?
15. Какая существует связь между количеством решений совместной системы линейных уравнений и рангом ее матрицы?

Тестовые задания

1. Даны векторы $\overline{a}_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\overline{a}_2 = (1, 0, -1, 1)$, $\overline{a}_3 = (0, 1, -1, 2)$, $\overline{a}_4 = (1, -1, 2, 0)$.

   а) Найдите линейную комбинацию $\overline{b} = 2\overline{a}_1 + 3\overline{a}_2 - \overline{a}_3 + \overline{a}_4$.

   Ответ: $\overline{b} = (6, 2, -3, 1)$.

   б) Выясните, является ли эта система векторов линейно зависимой или нет.

   Ответ: линейно независимая.

   в) Является ли эта система базисом пространства R^4?

   Ответ: да.

2. Дана система векторов $\overline{a}_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\overline{a}_2 = (1, 0, -1, 1)$, $\overline{a}_3 = (0, 2, 0, -1)$, $\overline{a}_4 = (3, 4, -3, 1)$.

   а) Выясните, является ли эта система векторов линейно зависимой или нет.

   Ответ: линейно зависимая.

   б) Убедитесь, что векторы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ являются базисом этой системы векторов.

   в) Найдите координаты векторов этой системы в базисе $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$.

   Ответ: $\overline{a}_1 = (1, 0)$, $\overline{a}_2 = (0, 1)$, $\overline{a}_3 = (1, -1)$, $\overline{a}_4 = (2, 1)$.

3. Чему равен ранг матрицы A:

   а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

   Ответ: 3;

   б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Ответ: 2.

4. Найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Ответ: 2.

Основная литература по теме

1. Высшая математика: Учебное пособие для студентов заочной формы обучения / Каленкович Е.Е., Соболев В.Ф., Владимиров Ю.Н., Колодко Л.С., Смилянский В.Р., Шитов К.В., Чиркунов Ю.А. – Новосибирск: НГАЭиУ, 1997. – гл.1.
2. *Шипачев В.С.* Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1990. – гл. 10. – п.п. 1–4.
3. *Шипачев В.С.* Задачник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000. – гл. 7. – п.п. 1, 2.

Раздел 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТЕМА 2.1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

2.1.1 Функция, график функции, основные элементарные функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если каждому значению переменной *x*, принадлежащему некоторому множеству вещественных чисел, соответствует единственное вещественное значение другой переменной *y*, то *y* есть *функция* от *x* или, в символической записи, $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ и т.п.

Переменная *x* называется *независимой переменной* или *аргументом*. Зависимость переменных *x* и *y* называется *функциональной зависимостью*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество значений аргумента *x*, для которых существуют значения функции *y*, называется *областью определения функции* (или *областью существования функции*).

ПРИМЕР 1. Функция $y = \log_2 x$ определена при всех значениях аргумента $x \in (0;\infty)$.

ПРИМЕР 2. Функция $y = \dfrac{5}{x-3}$ определена при всех значениях аргумента $x \neq 3$.

Одним из способов задания функции является графический способ в прямоугольной системе координат на плоскости Оху, при этом абсциссы точек являются значениями аргумента, а значениями функции – соответствующие ординаты.

Множество точек плоскости Оху, абсциссы которых являются значениями аргумента, а ординаты – соответствующими значениями функции, называется *графиком* функции.

Основными элементарными функциями называются следующие, аналитическим способом заданные функции.

1. *Степенная функция*: $y = x^{\alpha}$, где α – действительное число

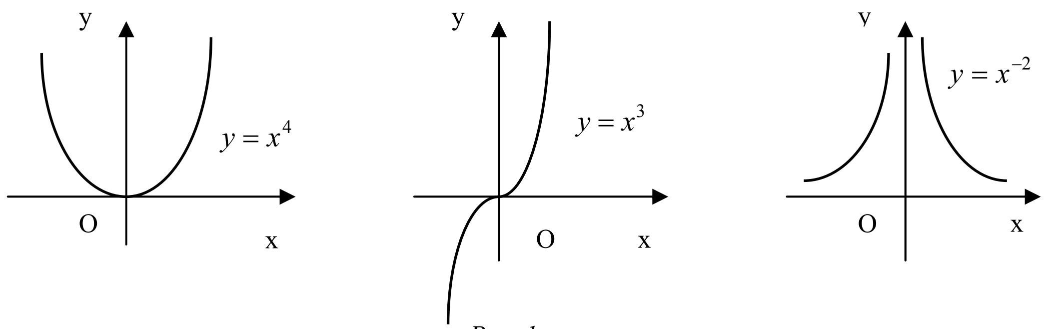


Рис. 1.

2. *Показательная функция*: $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.

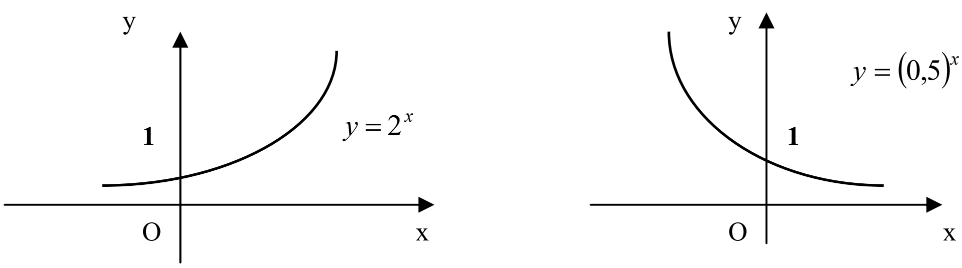


Рис. 2.

3. *Логарифмическая функция:* $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.

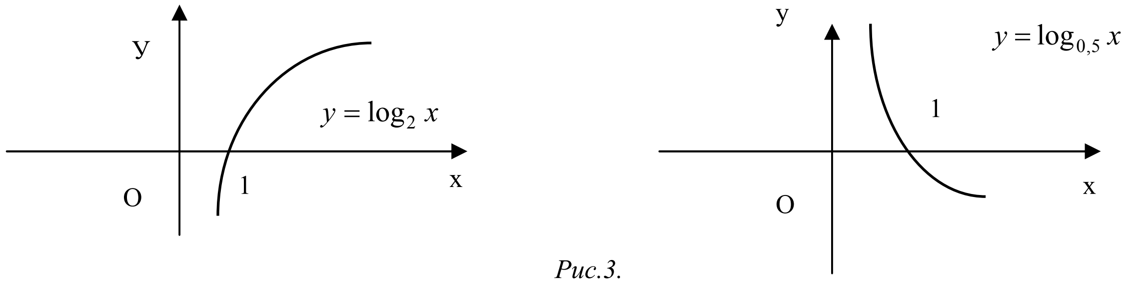


Рис.3.

4. *Тригонометрические функции*: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$.

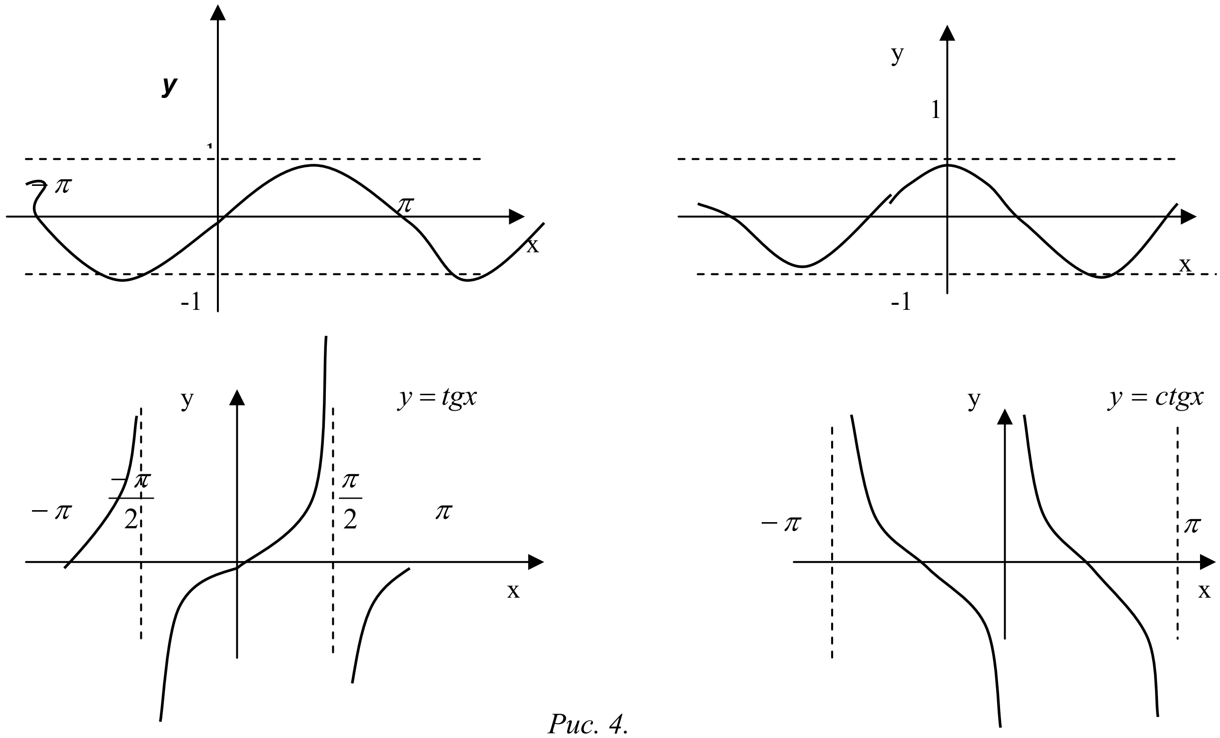


Рис. 4.

5. *Обратные тригонометрические функции*: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – промежуточный аргумент. Тогда функция $y = f(\varphi(x))$ называется *суперпозицией* (сложной функцией, функцией от функции).

Операция суперпозиции может быть взята сколь угодно раз, вложенность промежуточных аргументов может быть больше одной.

ПРИМЕР 3. $y = u^{\frac{1}{3}}$, $u = 1 + v$, $v = p^4$, $p = \cos x$.

Получаем сложную функцию $y = f(u(v(p(x))))$ или $y = \sqrt[3]{1 + \cos^4 x}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция называется *элементарной*, если она может быть образована из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций.

2.1.2. Числовая последовательность и ее предел

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если каждому натуральному числу $n \in N$ поставлено в соответствие некоторое действительное число, то совокупность чисел $\{a_n\}$, $n = 1;2;...$ называется числовой последовательностью.

По самому определению последовательность всегда содержит бесконечное множество элементов.

Числовая последовательность может быть задана либо в «естественном» виде путем перечисления ее элементов $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; ...\right)$, либо формулой ее n-го члена $\left(a_n = \frac{1}{n}\right)$.

Очевидно, что числовая последовательность является частным случаем функции, а именно, функции натурального аргумента: $a_n = f(n)$, $n \in N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Число *A* называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_ε, что для всех номеров n> n_ε выполняется условие

$$|a_n - A| < \varepsilon .$$

При этом записывают $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Последовательность, у которой существует предел, называется *сходящейся*. В противном случае последовательность *расходится*.

Простейшие свойства предела последовательности:

1. Числовая последовательность может иметь только один предел, конечный или бесконечный определенного знака.
2. Если числовые последовательности a_n, b_n, c_n связаны соотношением $a_n \le b_n \le c_n$ и существует $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$, то существует и $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.
3. Всякая сходящаяся последовательность ограничена сверху (снизу) и имеет точную верхнюю (нижнюю) грань, $\sup\{a_n\}$ $(\inf\{a_n\})$.
4. Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то сходится и последовательность $\{a_n \pm b_n\}$, причем
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n .$$
5. Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то сходится и последовательность $\{a_n \cdot b_n\}$ и
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n .$$
6. Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся и $\lim_{n\to\infty} b_n \ne 0$, то сходится и $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$, причем
$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \lim_{n\to\infty} a_n : \lim_{n\to\infty} b_n .$$

2.1.3. Предел функции. Основные свойства пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Замечательные пределы

Рассмотрим некоторые случаи изменения функции при стремлении аргумента *x* к некоторому значению *a* ($x \to a$) или к бесконечности.

Любой интервал (*c*, *d*), содержащий точку *a* называется *окрестностью* точки *a*: *c*<*a*<*d*. Множество значений *x*, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, $\delta > 0$ или $a - \delta < x < a + \delta$, называется δ -окрестностью точки *a*.

Точка *a* является центром, δ – радиусом.

Пусть $x \in X$, точка *a* необязательно принадлежит множеству X, но в любой сколь угодно малой δ -окрестности *a* найдется хотя бы одна точка $x \in X$. Тогда говорят, что *x* стремится к *a* ($x \to a$). Будем рассматривать также случаи $x \to +\infty$, $x \to -\infty$. Это означает, что для любого, сколь угодно большого *A* найдутся значения $x \in X$ такие, что $|x| > A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть функция *y*=*f*(*x*) определена на некотором множестве X, для точек которого определено понятие $x \to a$. Функция *y*=*f*(*x*) имеет конечный *предел* b ($y \to b$), если для любого сколь угодно малого числа ε >0 найдется такое $\delta_\varepsilon > 0$, что для всех *x*, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Если *b* есть *предел функции f*(*x*) при $x \to a$, то пишут

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если *f*(*x*) стремится к пределу *b*, при $x \to a$ так, что *x* принимает только значения, меньшие *a*, то пишут $\lim_{x\to a-0} f(x) = b_1 = f(a-0)$ и называют b_1 пределом функции *f*(*x*) в точке *x*=*a* слева.

Если x принимает только значения, большие a, то пишут $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_2=f(a+0)$ и называют b_2 пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$ справа.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для существования предела функции при $x\to a$ не требуется, чтобы функция была определена в точке $x=a$.

ПРИМЕР 1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$, хотя функция не определена при x=2. Это следует из того, что при

$x\neq 2\quad \dfrac{x^2-4}{x=2}=x+2$ и $\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $f(x)$ стремится к пределу b при $x\to\infty$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое $A>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>A$ будет выполняться неравенство $|f(X)-b|<\varepsilon$. Символически это записывается так:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция $f(x)$ стремится к бесконечности при $x\to a$, т.е. является *бесконечно большой* (б.б.ф.) при $x\to a$, если для каждого сколь угодно большого $M>0$ можно найти такое $\delta>0$, что для всех значений $x\to a$, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x)|>M$. В этом случае предел не существует, но условно записывают

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty.$$

ПРИМЕР 2. $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{4}{x-2}=-\infty;\qquad \lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{4}{x-2}=+\infty.$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $\alpha=a(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to a$ или при $x\to\infty$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0.$

ПРИМЕР 3. Функция $\alpha=(x-1)^2$ бесконечно малая (б.м.ф.) при $x\to 1$, так как $\lim\limits_{x\to 1}\alpha=0$. Функция $\alpha=\dfrac{1}{x}$ б.м.ф. при $x\to\infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Свойства б.м.ф. устанавливаются следующими теоремами.

ТЕОРЕМА 1. Если функция $y=f(x)$ при $x\to a$ $(x\to\infty)$ может быть представлена в виде суммы постоянного числа b и б.м.ф. α : $y=b+\alpha$, то

$$\lim_{x\to a} y=b \quad \text{или} \quad \lim_{x\to\infty} y=b.$$

Справедливо и обратное: из $y\to b$ следует $y=b+\alpha$.

ПРИМЕР 4. $y=\dfrac{2x+3}{x}$ при $x\to\infty$ может быть представлена $y=2+\dfrac{3}{x}$, где $\alpha=\dfrac{3}{x}$ – б.м.ф.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty} y=2$.

ТЕОРЕМА 2. Если α – б.м.ф. и $\alpha\neq 0$, то $\beta=\dfrac{1}{\alpha}$ – б.б.ф. И обратно: если α – б.б.ф., то β – б.м.ф.

ПРИМЕР 5. $\alpha=\dfrac{5}{x}$ при $x\to\infty$ является б.м.ф. $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{x}{5}\to\infty$, т.е. $\dfrac{1}{\alpha}$ – б.б.ф.

ТЕОРЕМА 3. Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций есть б.м.ф.

ТЕОРЕМА 4. Произведение ограниченной функции на б.м.ф. есть б.м.ф.

ПРИМЕР 6. $f(x)=\sin x$ – ограниченная функция. $\alpha=\dfrac{1}{x^2}$ при $x\to\infty$ является б.м.ф. $f(x)\cdot\alpha=\dfrac{\sin x}{x^2}$ – б.м.ф.

ТЕОРЕМА 5. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю, есть б.м.ф.

Основные свойства пределов

Будем считать, что пределы функций, указанные ниже, существуют.

ТЕОРЕМА 6. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x\to a}\left(U_1+U_2+\ldots+U_k\right)=\lim_{x\to a}U_1+\lim_{x\to a}U_2+\ldots+\lim_{x\to a}U_k .$$

ТЕОРЕМА 7. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to a}\left(U_1\cdot U_2\cdot\ldots\cdot U_k\right)=\lim_{x\to a}U_1\cdot\lim_{x\to a}U_2\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to a}U_k .$$

ТЕОРЕМА 8. Предел частного двух функций равен частному пределов при условии, что предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\frac{U}{V}=\frac{\lim\limits_{x\to a}U}{\lim\limits_{x\to a}V}.$$

ТЕОРЕМА 9. Если значения трех функций в некоторой окрестности точки а связаны соотношением $U(x)\le Z(x)\le V(x)$ и при этом

$$\lim_{x\to a}U(x)=\lim_{x\to a}V(x)=b\text{, то }\lim_{x\to a}Z(x)=b .$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел имеет вид $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ и устанавливает эквивалентность $\sin x$ и x, т.е. $\sin x\sim x$ в окрестности точки $x=0$. Здесь x измеряется в радианах. Если $\varphi(x)$ есть б.м.ф. в точке $x=a$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

ПРИМЕР 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5x}{3x}=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$.

Второй замечательный предел имеет вид $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$, где $e\approx 2{,}718$ – иррациональное число. Если $\varphi(x)$ – б.б.ф в точке $x=a$, то $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=e$.

Логарифмы, у которых основанием является число e, называются натуральными и записываются особым способом: $\ln x$.

2.1.4. Непрерывность функции в точке и на интервале. Основные свойства непрерывных функций. Точки разрыва. Виды точек разрыва. Устранимый разрыв

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и $y_0=f(x_0)$. Если аргумент, получив некоторое приращение Δx, примет значение $x_0+\Delta x$, то и функция получит соответствующее приращение $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x=x_0$, если она в этой точке и в окрестности точки определена и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого интервала (a, b), то говорят, что функция непрерывна на этом интервале.

Если $y=f(x)$ определена при $x=a$ и $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a)$, то говорят, что $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$ *справа.*

Если $y=f(x)$ определена при $x=b$ и $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=f(b)$, то говорят, что $f(x)$ непрерывна в точке $x=b$ *слева.*

Если $y=f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и непрерывна на концах интервала соответственно справа и слева, то говорят, что $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Свойства непрерывных функций

ТЕОРЕМА 1. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она достигает своих наименьшего (m) и наибольшего (M) значений на этом промежутке.

Смысл этой теоремы наглядно иллюстрирует рис. 5.

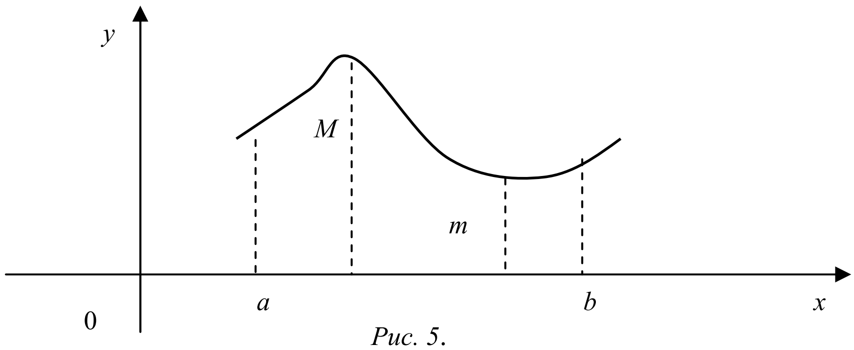


Рис. 5.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $y=f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков. Тогда внутри $[a, b]$ найдется по крайней мере одна точка $x=c$, в которой $f(c)=0$.
Геометрический смысл этой теоремы иллюстрируется на рис. 6.

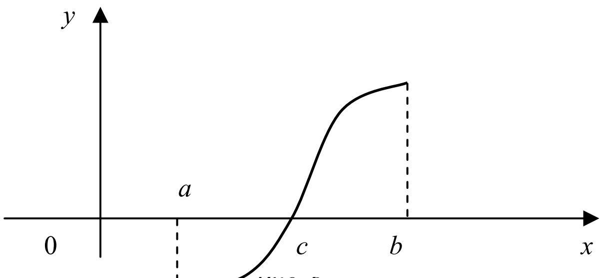


Рис. 6.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $y=f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$. Если $f(a) \neq f(b)$, то каково бы ни было число C между $f(a)$ и $f(b)$, найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, в которой

$$f(c) = C.$$

Смысл теоремы иллюстрируется на рис. 7.

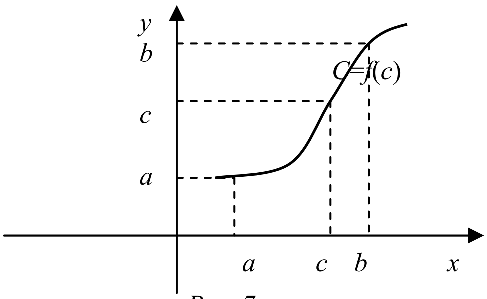


Рис. 7.

Точки разрыва функции

Из определений непрерывности функции $y=f(x)$ во внутренней точке x_0 интервала (a, b) следует, что непрерывность в точке x_0 равносильна непрерывности функции в этой точке одновременно справа и слева, т.е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

или

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Из этих соображений видно, при каких обстоятельствах для функции $f(x)$ в точке x_0 появляется *разрыв.*
Пусть существует конечный предел $f(x_0 + 0) \neq f(x_0).$ Тогда говорят, что функция в точке x_0 имеет разрыв *первого рода справа.* Аналогично для $f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$ имеет разрыв *первого рода слева* в точке x_0.
Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$ и функция в точке x_0 не определена или определена, но $f(x_0) \neq A$, то x_0 называют точкой *устранимого разрыва.* В этом случае функцию в точке x_0 можно *доопределить до непрерывности,* присвоив ей значение в этой точке $f(x_0) = A$.

Может случиться так, что хотя бы один из пределов $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$ не существует или равен бесконечности. В этом случае точку x_0 называют точкой разрыва *второго рода* соответственно слева или справа.

ПРИМЕР 1. На рис. 8 представлен график функции $y=2^{\frac{1}{x}}$, где принято $f(0)=0$. $x=0$ – точка разрыва первого рода слева и она тоже точка разрыва второго рода справа.

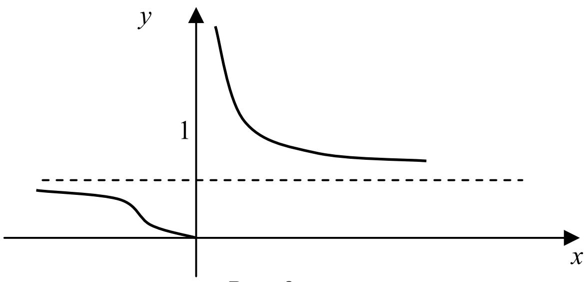


Рис. 8.

ПРИМЕР 2. На рис. 9 представлен график функции $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, которая в точке $x=2$ имеет устранимый разрыв. Устранить разрыв в точке $x=2$ можно, присвоив функции в этой точке значение, равное $y=4$, т.е. доопределив функцию до непрерывности в этой точке.

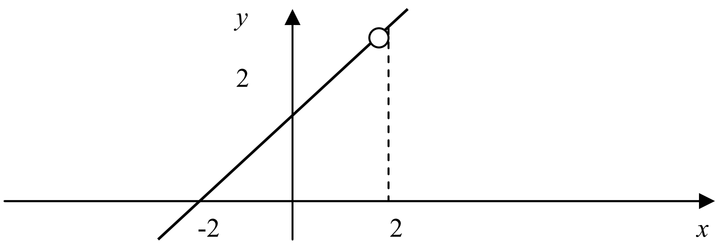


Рис. 9.

ТЕОРЕМА 4. Все элементарные функции непрерывны в своих областях определения.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение понятия функции.
2. Какие способы задания функциональной зависимости вы знаете?
3. Какие функции называются элементарными?
4. Сформулируйте определение понятия предела функции.
5. В каком случае функция называется бесконечно малой?
6. В каком случае функция называется бесконечно большой?
7. Сформулируйте основные теоремы о бесконечно малых.
8. Сформулируйте основные теоремы о пределах.
9. Сформулируйте первый и второй замечательные пределы.
10. Что такое приращение аргумента и функции?
11. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке и на промежутке.
12. Сформулируйте теоремы о непрерывных функциях.

Основная литература по теме

1. *Высшая математика*: Учебное пособие для студентов заочной формы обучения / Каленкович Е.Е., Соболев В.Ф., Владимиров Ю.Н., Колодко Л.С., Смилянский В.Р., Шитов К.В., Чиркунов Ю.А. – Новосибирск: НГАЭиУ, 1997. – гл. 3. – п.п. 1–3.
2. *Шипачев В.С.* Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1990. – гл. 4. – п.п. 1–12.
3. *Шипачев В.С.* Задачник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000. – гл. 4. – п.п. 1–3.

ТЕМА 2.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2.2.1. Производная, ее геометрический смысл. Дифференциал. Основные правила нахождения производной. Таблица производных

Пусть мы имеем функцию $y=f(x)$, определенную в некотором промежутке. Пусть аргумент x получил приращение Δ x. Тогда функция получит приращение

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$. Если этот предел существует, то его называют *производной* данной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'(x)$. Таким образом, по определению,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Следовательно, производной данной функции $y=f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда последнее произвольным образом стремится к нулю.
В общем случае для каждого значения x производная $f'(x)$ имеет определенное значение, т.е. производная является также *функцией* от x.

Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной употребляются и другие обозначения, например y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$ (читается: y штрих, y штрих по x, dy по dx).
Конкретное значение производной при x=a обозначается

$$f'(a) \quad \text{или} \quad y'\big|_{x=a}.$$

Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется *дифференцированием* этой функции, а функция, имеющая производную в точке x, называется дифференцируемой в этой точке. Функция, дифференцируемая в каждой точке некоторого промежутка, называется *дифференцируемой на промежутке.*
Теперь дадим важное *геометрическое* истолкование производной.

Рассмотрим функцию $f(x)$ и соответствующую этой функции кривую $y=f(x)$ в прямоугольной системе координат (рис. 10).

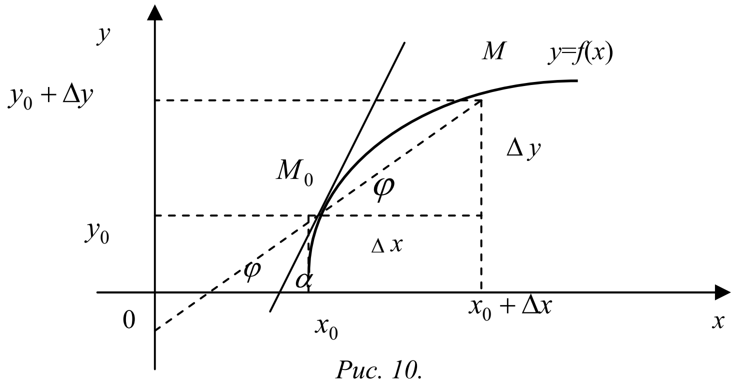


Рис. 10.

Пусть при некотором значении аргумента x_0 функция имеет значение $y_0 = f(x_0)$. Этим значениям на кривой соответствует точка $M_0(x_0, y_0)$. Дадим аргументу приращение Δx и новому значению $x_0 + \Delta x$ на кривой соответствует точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Проведем секущую M_0M и обозначим через φ угол, образованный секущей с положительным направлением оси Ох. Из рисунка видим, что

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если теперь $\Delta x \to 0$, то точка М будет перемещаться вдоль кривой, приближаясь к M_0. Секущая будет поворачиваться вокруг точки M_0, а угол φ будет изменяться. Если при $\Delta x \to 0$ угол φ стремится к некоторому пределу α, то прямая, проходящая через M_0 и составляющая с положительным направлением оси Ох угол α, будет *касательной* к графику функции в точке M_0. Нетрудно найти ее угловой коэффициент:

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Следовательно, значение производной функции $f'(x_0)$ при заданном значении аргумента x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в заданной точке x_0.
С понятием производной функции связано понятие ее *дифференциала*.
Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Производная этой функции в некоторой точке $x \in [a, b]$ определяется равенством

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

По определению предела переменной можем записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.
Умножив все члены последнего равенства на Δx, получим

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

Так как в общем случае $f'(x) \neq 0$, то при постоянном x и $\Delta x \to 0$ слагаемое $\alpha \cdot \Delta x$ – б.м.в. более высокого порядка, чем $f'(x) \cdot \Delta x$. Таким образом, слагаемое $f'(x) \cdot \Delta x$ является *главной частью* приращения, *линейной* относительно Δx. Произведение $f'(x) \cdot \Delta x$ называют *дифференциалом* функции и обозначают dy или $df(x)$. При этом дифференциал независимой переменной dx совпадает с ее приращением Δx. Тогда

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Из этого отношения следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Следовательно, производную $f'(x)$ можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента. Из определения непрерывности и формулы (1) следует, что функция, дифференцируемая в точке *x*, является в ней непрерывной. Обратное в общем случае неверно (функция $y=|x|$ в точке *x*=0 непрерывна, но не дифференцируема).

При нахождении производной функции необходимо руководствоваться *основными правилами дифференцирования.*

ТЕОРЕМА 1. Производная постоянной величины равна нулю, т.е. $(C)'=0$, если *C*=const.

ТЕОРЕМА 2. Постоянный множитель можно выносить за знак производной, т.е. если $y=C\cdot U(x)$, где *C*=const, то $y'=C\cdot U'(x)$.

ТЕОРЕМА 3. Производная суммы конечного числа дифференцируемых функций равна соответствующей сумме производных этих функций, т.е.

$$(U+V+W)'=U'+V'+W'.$$

ТЕОРЕМА 4. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первой функции на вторую функцию плюс произведение первой функции на производную второй функции, т.е.

$$(U(x)\cdot V(x))'=U'(x)\cdot V(x)+U(x)\cdot V'(x).$$

ТЕОРЕМА 5. Производная дроби равна дроби, у которой знаменатель равен квадрату знаменателя данной дроби, а числитель равен разности между произведением знаменателя на производную числителя и произведением числителя на производную знаменателя

$$\left(\frac{U(x)}{V(x)}\right)'=\frac{U'(x)\cdot V(x)-U(x)\cdot V'(x)}{[V(x)]^2}.$$

Находить производную функции по определению не удобно, поэтому на практике пользуются *таблицей производных* элементарных функций:

Пусть переменная y есть функция от переменной *u* $(y=f(u))$, а переменная *u* в свою очередь есть функция от независимой переменной *x*, т.е. задана *сложная* функция $f=f[\varphi(x)]$.

ТЕОРЕМА 6. Если $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$ - дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу и умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной *x*, т.е. $y'=f'(u)\cdot u'$.

Правило дифференцирования сложной функции может быть записано и в других формах: $y_x=y'_u\cdot u'_x$ или $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

Находить производные по определению не удобно, поэтому на практике пользуются *таблицей 1.* В первом столбце этой таблицы для удобства пользования собраны арифметические свойства производной, во втором – производные наиболее часто используемых функций, в третьем – соответствующие формулы для сложной функции.

Таблица 1

Арифметические свойства производных	Производные основных элементарных функций	Производные для сложных функций $u=u(x)$

I. $(C\cdot u)'=C\cdot u'$	1. $(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	1. $(u^{\alpha})'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$
II. $(u+v)'=u'+v'$	2. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$	2. $(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$
III. $(u\cdot v)'=u'v+uv'$	$(e^x)'=e^x$	$(e^u)'=e^u\cdot u'$
IV. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	3. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$	3. $(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$
	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$
	4. $(\sin x)'=\cos x$	4. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
	5. $(\cos x)'=-\sin x$	5. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
	6. $(tg\,x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	6. $(tg\,u)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
	7. $(ctg\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	7. $(ctg\,u)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
	8. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	8. $(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
	9. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	9. $(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
	10. $(arctg\,x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	10. $(arctg\,u)'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
	11. $(arcctg\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$	11. $(arcctg\,u)'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

ПРИМЕР 1. Найти производную функции $y=\left(\sqrt{x}+5\right)^3$.

РЕШЕНИЕ. Функцию можно представить в виде $y=u^3$, где $u=\sqrt{x}+5$. Поэтому на основании формулы производной сложной функции

$$y\;=3u^2\cdot u'=3\left(\sqrt{x}+5\right)^2\left(\sqrt{x}+5\right)'=\frac{3\left(\sqrt{x}+5\right)^2}{2\sqrt{x}}.$$

ПРИМЕР 2. Найти производную функции $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем $y=\sqrt[3]{u}$, где $u=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, поэтому

$$y'=\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\cdot u'=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}\cdot\frac{2x\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{4x}{3\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)^2}}.$$

2.2.2. Правило Лопиталя

При нахождении предела функции иногда приходится иметь дело с выражением вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, которое принято называть неопределенностью. «Раскрытию» этой неопределенности (освобождению от нее) и служит правило Лопиталя.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a и обращаются в нуль в этой точке, т.е. $f(a)=0$ и $\varphi(a)=0$.

Отношение $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ не определено при x=a, но имеет вполне определенный смысл при $x \neq a$. Следовательно, может быть поставлен вопрос о нахождении предела этого отношения при $x \to a$.

ТЕОРЕМА (ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки а и обращаются в нуль в этой точке, т.е. $f(a)=0$ и $\varphi(a)=0$ и $\varphi'(x) \neq 0$ в указанной окрестности; тогда, если существует предел отношения $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x \to a$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема имеет место и в том случае, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ не определены при $x=a$, но

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a}\varphi(x) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $f'(a) = \varphi'(a) = 0$ и $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют условиям для $f(x)$ и $\varphi(x)$, то применяя правило Лопиталя к отношению $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, приходим к формуле

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ и т.д.}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Правило Лопиталя применимо и в том случае, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$, а так же для односторонних пределов при $x \to a\ \pm 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Правило Лопиталя применимо для вычисления предела отношения бесконечно больших функций, т.е. если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty.$ Такой предел называют неопределенностью вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

ПРИМЕР 1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1/x} = 1.$

ПРИМЕР 2. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1/x}{\ln x} = \left[\dfrac{\infty}{-\infty}\right] = \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{-1/x^2}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\infty.$

2.2.3. Теорема Лагранжа. Формула Тейлора. Производные высших порядков

Производные высших порядков

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на некотором отрезке $[a, b]$. Как отмечалось выше, $f'(x)$ представляет собой тоже функцию от x. Дифференцируя эту функцию, мы получаем так называемую вторую производную от функции $f(x)$.

Производная от первой производной называется *производной второго порядка* или *второй производной* первоначальной функции и обозначается символом y'' или $f''(x)$.

$$y'' = (y')' = f''(x).$$

Так, например, если $y = x^5$, то $y' = 5x^4$; $\quad y'' = (5x^4)' = 20x^3$.

Производная от второй производной называется *производной третьего порядка* или *третьей производной* и обозначается y''' или $f'''(x)$.

Вообще, *производной n-го порядка* от функции $f(x)$ называется производная (первого порядка) от производной $(n–1)$-го порядка и обозначается символом

$$y^{(n)} \text{ или } f^{(n)}(x).$$

Порядок производной берется в скобки, чтобы его нельзя было принять за показатель степени.
Производные четвертого, пятого и высших порядков обозначаются также с помощью римских цифр: y^{IV}, y^{V}, y^{VI},... В этом случае порядок производной пишется без скобок. Например, если $y = x^5$, то $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$, $y^{IV} = y^{(4)} = 120x$, $y^{V} = y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = y^{(7)} = ... = 0$.
ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА (теорема о конечных приращениях).
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b), то найдется по крайней мере одна точка $c \in (a, b)$, что

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Смысл теоремы состоит в том, что на графике обязательно найдется точка внутри $[a, b]$, касательная в которой параллельна секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Формула Тейлора

Предположим, что функция $y=f(x)$ имеет все производные до $(n+1)$-го порядка включительно в некоторой окрестности точки $x=a$. Формула Тейлора имеет вид

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} \cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) + R_n(x).$$

Если в формуле Тейлора положить $a=0$, то получим

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} \cdot f^{(n)}(0) + R_n(x),$$

называемую формулой Маклорена. $R_n(x)$ называется остаточным членом этих формул.
Формулы Тейлора и Маклорена, в частности, применяются для нахождения приближенных значений функций.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение производной.
2. Каков геометрический смысл производной?
3. Что называется касательной к кривой? Как составить уравнение касательной к графику функции?
4. Сформулируйте правила дифференцирования функций и напишите таблицу производных основных функций.
5. Что называется дифференциалом функции и дифференциалом независимой переменной?
6. Каков геометрический смысл дифференциала функции?
7. Чем отличается дифференциал функции от ее приращения?

Тестовые задания

Найти производные функций:

1. $y = \sqrt{3x^2 - x} + e^{\sin x} \cdot \cos x$;

Ответ: $y' = \dfrac{6x-1}{2\sqrt{3x^2 - x}} + \left(e^{\sin x} \cdot \cos^2 x - e^{\sin x} \cdot \sin x\right)$.

2. $y = arctgx\sqrt{3x}$;

Ответ: $y' = \dfrac{1}{1+3x} \cdot \dfrac{3}{2\sqrt{3x}}$.

2.2.4. Исследование функции на экстремум. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума

Понятие производной позволяет исследовать поведение функции, не имея перед собой графика этой функции. Более того, исследование с помощью производной позволяет нарисовать эскиз графика функции. Рассмотрим сначала, как производная позволяет выяснить характер изменения функции, т.е. ее убывание и возрастание.
ТЕОРЕМА 1.

1) Если функция $f(x)$, имеющая производную на отрезке $[a, b]$, не убывает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.

2) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a<x<b$, то эта функция возрастает на $[a, b]$.

Аналогичная теорема имеет место и для убывающей (дифференцируемой) функции.

Таким образом, чтобы найти промежутки возрастания (убывания) функции $f(x)$, нужно решить неравенство $f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0)$.

ПРИМЕР 1. Найти области убывания и возрастания функции $y = x^4$.

РЕШЕНИЕ. $y' = 4x^3$. Решаем неравенство

$4x^3 > 0; \quad x > 0$, т.е. $x \in (0;\ \infty)$– область возрастания функции.

$4x^3 < 0; \quad x < 0$, т.е. $x \in (-\infty;\ 0)$ – область убывания функции.

Все это наглядно представлено на рис. 11 в виде графика функции.

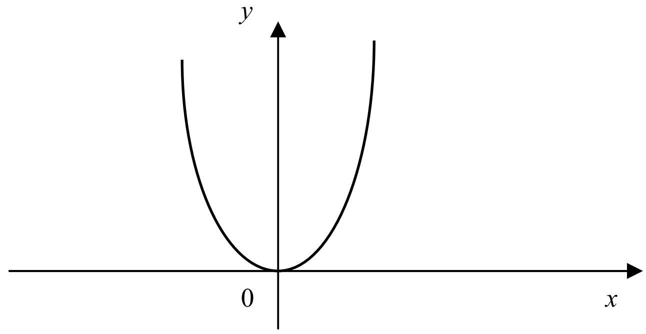


Рис. 11.

Перейдем теперь к исследованию функции на *экстремум*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f(x)$ имеет *максимум* в точке $x = x_1$, если $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ при любых Δx, достаточно малых по абсолютной величине.

Функция $f(x)$ имеет *минимум* в точке $x = x_1$, если $f(x_1 + \Delta x) > f(x_1)$ при любых Δx, достаточно малых по абсолютной величине.

Точки x_1 в определении 1 называются *точками локального максимума* и *минимума* соответственно. Общее название – *точки экстремума функции.*

На рис12. Функция в точке x_1 имеет максимум, а в точке x_2 - минимум.

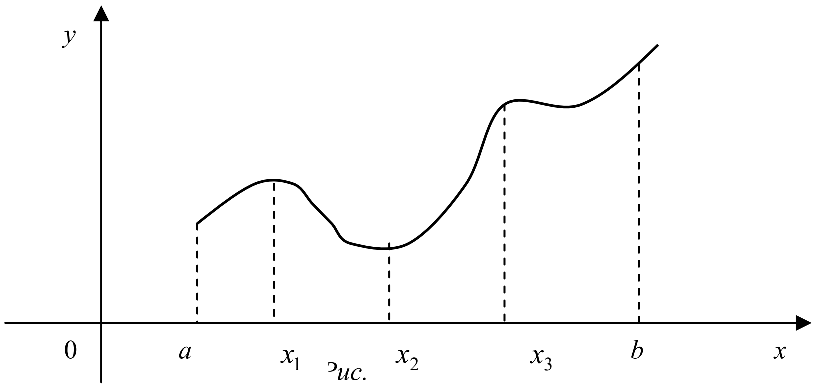


Рис.

Не следует думать, что максимум и минимум функции на отрезке являются соответственно ее наибольшим и наименьшим значениями на этом отрезке.

Так, на рис. 13 изображена функция, определенная на отрезке $[a, b]$, которая при $x = x_1$ и $x = x_3$ имеет максимум (max), при $x = x_2$ и $x = x_4$ имеет минимум (min), но min функции при $x = x_4$ больше max функции при $x = x_1$. При $x = b$ значение функции больше любого max функции на рассматриваемом отрезке.

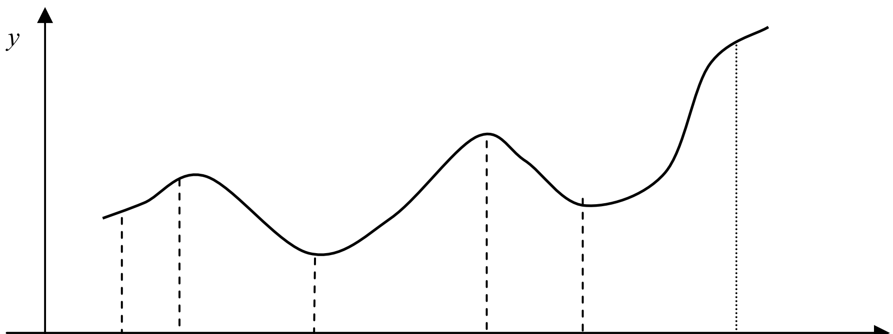
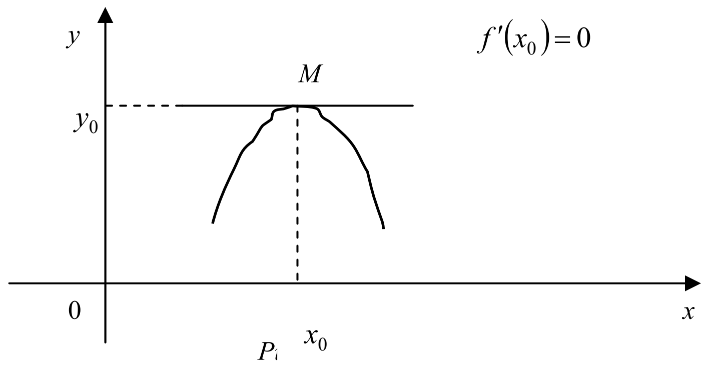


Рис. 13.

Максимум и минимум функции называют *экстремумами* или *экстремальными значениями* функции.
Укажем теперь метод нахождения экстремумов.

ТЕОРЕМА 2. (Необходимое условие существования экстремума.) Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ max или min, то ее производная в этой точке обращается в нуль, т.е. $f'(x_0) = 0$, а касательная к графику в точке (x_0, y_0) параллельна оси абсцисс (рис. 14).



Р

В точках из области определения функции, в которых $f'(x_0)$ не существует, функция также может иметь экстремум (рис. 15).

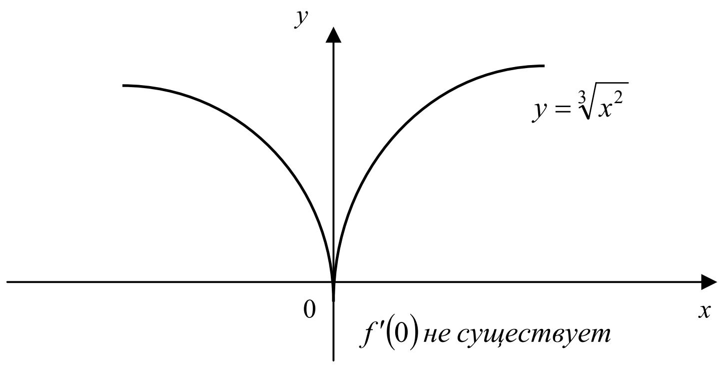


Рис. 15.

Точки из области определения функции, в которых $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, называются *стационарными точками* соответственно 1-го и 2-го рода.
Исследование стационарных точек на экстремум опирается на следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3. (Достаточные условия существования экстремума.) Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1). Если при переходе слева направо через эту точку $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», то при $x = x_1$ функция имеет максимум. Если же при переходе через точку x_1 слева направо $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то $f(x)$ в точке x_1 имеет минимум. Если при переходе через точку x_1 знак не меняется, то экстремума в этой точке нет (см. x_3 на рис.12).

Таким образом,

а) если $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{при } x < x_1, \\ f'(x) < 0 & \text{при } x > x_1, \end{cases}$ то в точке x_1 функция имеет максимум;

б) если $\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{при } x < x_1, \\ f'(x) > 0 & \text{при } x > x_1, \end{cases}$ то в точке x_1 функция имеет минимум.

Исследование функции на экстремум в критических точках также может быть проведено и с помощью второй производной (если она существует), что формулируется в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f'(x_1)=0$, тогда при $x=x_1$ функция имеет максимум, если $f''(x_1)<0$, и минимум, если $f''(x_1)>0$.

ПРИМЕР 2. Исследовать на экстремум функцию $y=\frac{1}{3}\cdot x^3-2x^2+3x+1$.

РЕШЕНИЕ.

1) Находим первую производную: $y'=x^2-4x+3$.

2) Находим критические точки, решая уравнение $x^2-4x+3=0$. $x_1=1,\quad x_2=3$. Производная всюду непрерывна. Значит, других критических точек нет.

3) Исследуем критическую точку $x_1=1$: при $x<1$ $y'>0$; при $x>1$ $y'<0$.

Значит при переходе (слева направо) через значение $x_1=1$ производная меняет знак с «+» на «–».

Следовательно, при x=1 функция имеет максимум, а именно $y_{\max}=\frac{7}{3}$.

4) Исследуем вторую критическую точку $x_2=3$: при $x<3$ $y'<0$; при $x>3$ $y'>0$. Значит при переходе через значение x=3 производная меняет знак с «–» на «+». Следовательно, при x=3 функция имеет минимум, а именно $y_{\min}=1$.

2.2.5. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Необходимое условие перегиба. Достаточное условие перегиба

Рассмотрим на плоскости кривую $y=f(x)$, являющуюся графиком дифференцируемой функции $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Говорят, что кривая *выпукла вверх* на интервале (a, b), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Говорят, что кривая *выпукла вниз* на интервале (a, b), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Кривую, обращенную выпуклостью вверх, будем называть *выпуклой,* а обращенную выпуклостью вниз – *вогнутой* (рис. 16, 17).

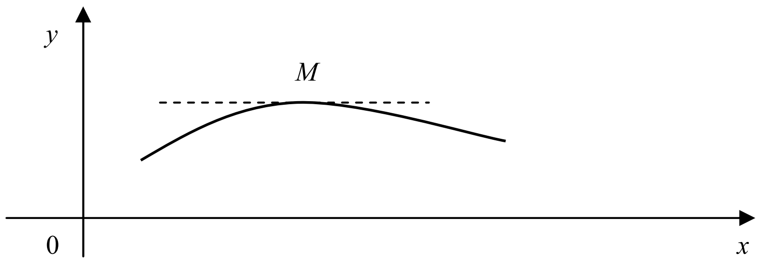


Рис. 16

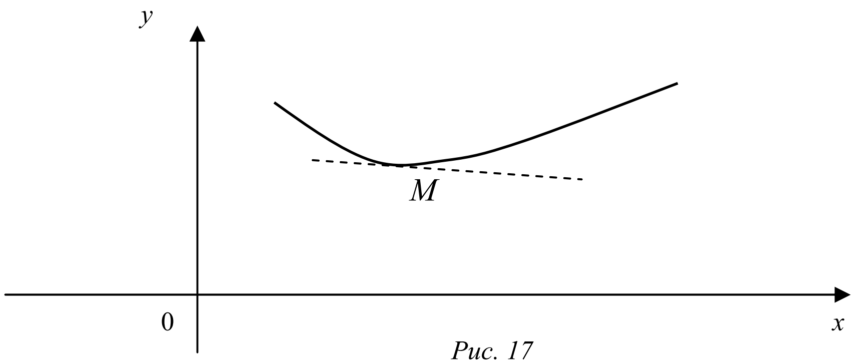


Рис. 17

Теперь установим признаки, по которым можно было бы судить о направлении выпуклости графика на различных интервалах.

ТЕОРЕМА 1. Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна (положительна), т.е. $f''(x)<0\quad (f''(x)>0)$, то кривая $y=f(x)$ на этом интервале выпукла (вогнута).

ПРИМЕР 1. Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y=x^3$.

РЕШЕНИЕ. Вторая производная $y'' = 6x$. $y'' < 0$ при $x < 0$ и $y'' > 0$ при $x > 0$. Следовательно, $(0;\infty)$ – интервал вогнутости, а $(-\infty;0)$ – интервал выпуклости функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Точки $x=a$ из области определения функции, разделяющие интервалы выпуклости и вогнутости, называются *точками перегиба* функции.

В этих точках график функции как бы «перегибается» через касательную в точке (a; $f(a)$).

Установим теперь условия того, что данная точка кривой является точкой перегиба.

ТЕОРЕМА 2. Пусть кривая определяется уравнением $y=f(x)$. Если $f''(a)=0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x=a$ из области определения функции производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $x=a$ есть точка перегиба.

Исследование функции на наличие у нее точек перегиба аналогично исследованию ее на экстремум с заменой в формулировках теорем y' на y''.

ТЕОРЕМА 3. (Необходимое условие существования точек перегиба.) Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ точку перегиба, то ее вторая производная в этой точке равна нулю или не существует.

Точки из области определения функции, в которых ее вторая производная y'' равна нулю или не существует, называются критическими точками 1-го и 2-го рода соответственно.

ТЕОРЕМА 4. (Достаточное условие существования точек перегиба.) Пусть функция $y=f$(x) дифференцируема и имеет непрерывную производную $f'(x)$ в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0 .Если при переходе слева направо через эту точку $f''(x)$ меняет знак с «–» («+») на «+» («–»), то точка $x = x_0$ – точка перегиба. Если же при переходе через точку x_0 $f''(x)$ не меняет знак, то точка x_0 не является точкой перегиба.

ПРИМЕР 2. Найти точки перегиба кривой $y = e^{-x^2}$ (кривая Гаусса).

РЕШЕНИЕ.

1) Находим вторую производную: $y' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$, $y'' = 2 \cdot e^{-x^2} \cdot (2x^2 - 1)$.

2) y'' существует всюду. Решая уравнение y''=0, находим корни $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3) Исследуем полученные значения: при $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем y''>0, при $x > -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем y''<0. Следовательно, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – интервал выпуклости, $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\infty\right)$ – интервалы вогнутости, а точки $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ – точки перегиба.

ПРИМЕР 3. Исследовать на точки перегиба кривую $y=\sqrt[3]{x-1}$.

РЕШЕНИЕ.

1) Находим вторую производную: $y'=\frac{1}{3}\cdot(x-1)^{-2/3}$, $y''=-\frac{2}{9}\cdot(x-1)^{-5/3}$.

2) $y''\neq 0$ при любых x, но при x=1 она не существует.

3) Исследуем точку x=1: при x<1 $y''>0$ – кривая вогнута; при x>1 $y''<0$ – кривая выпукла. Следовательно, x=1 – точка перегиба. График этой функции представлен на рис. 18.

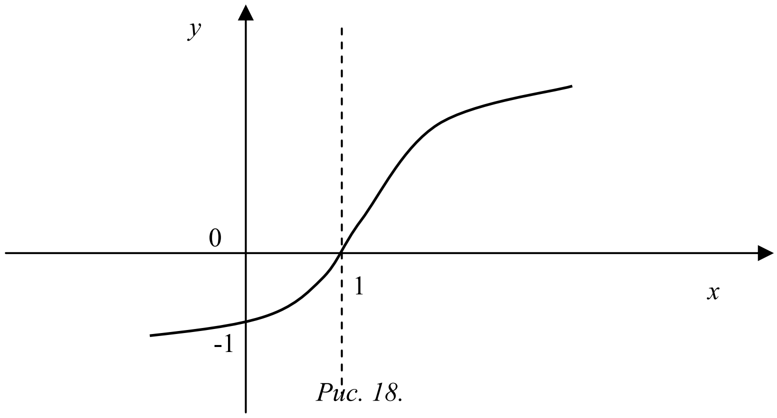


Рис. 18.

2.2.6. Асимптоты графика функции: вертикальные, горизонтальные, наклонные

Часто приходится исследовать форму кривой $y=f(x)$ при неограниченном возрастании (по модулю) абсциссы или ординаты переменной точки кривой или абсциссы и ординаты одновременно. При этом важным частным случаем является тот, когда исследуемая кривая при удалении ее переменной точки в бесконечность неограниченно приближается к некоторой прямой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Прямая называется *асимптотой кривой*, если расстояние d от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю (рис. 19 и 20).

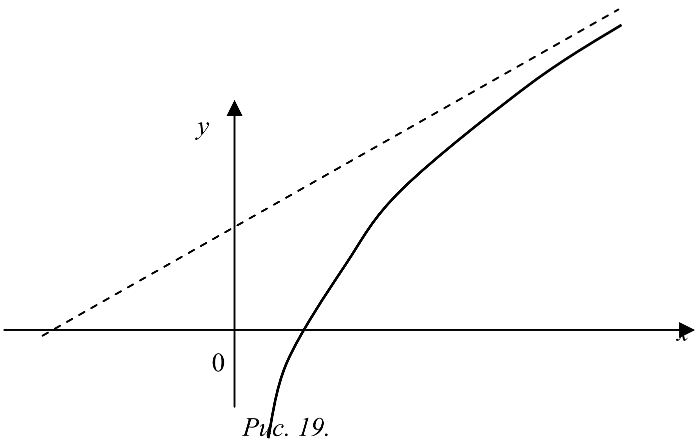


Рис. 19.

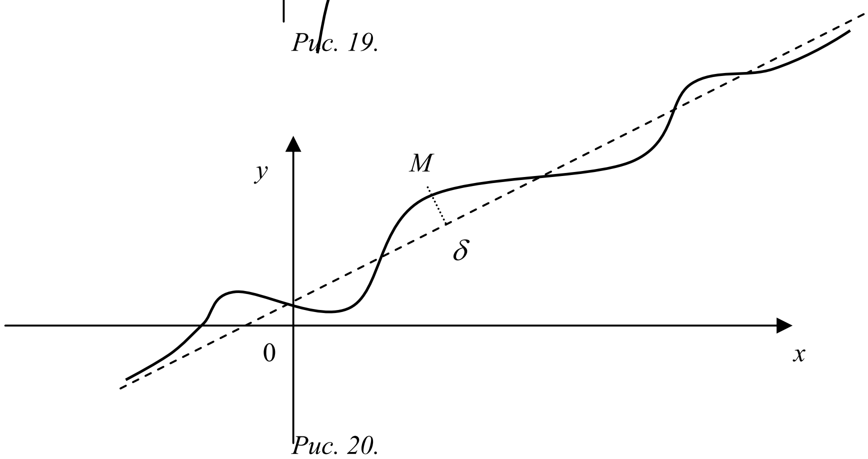


Рис. 20.

Различают *вертикальные* и *наклонные* асимптоты.

Вертикальные асимптоты

Если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x=a$ – асимптота кривой $y=f(x)$; и обратно, если прямая $x=a$ – асимптота, то выполняется одно или оба из написанных равенств.
Вертикальные асимптоты, как правило, проходят через точки на оси абсцисс, в которых функция не определена. Это точки разрыва второго рода.

ПРИМЕР 1. Кривая $y = \dfrac{2}{x-5}$ имеет вертикальную асимптоту x=5, так как $\lim\limits_{x\to 5-0} \dfrac{2}{x-5} = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 5+0} \dfrac{2}{x-5} = \infty$.

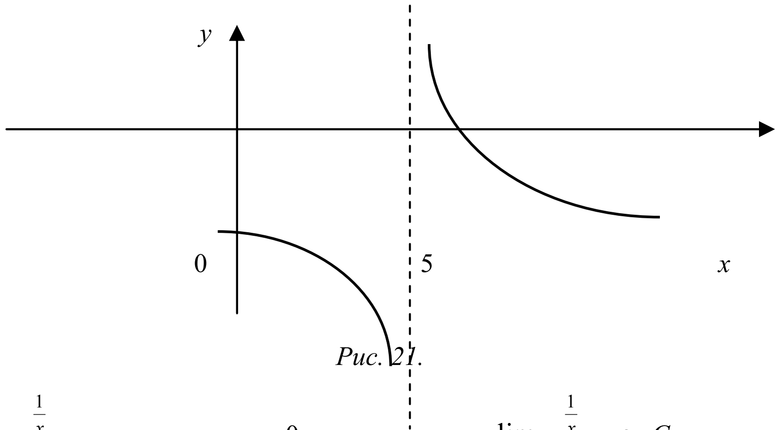


Рис. 21.

ПРИМЕР 2. Кривая $y = e^{\frac{1}{x}}$ имеет асимптоту x=0 *справа*, так как $\lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$. *Слева* прямая x=0 асимптотой не является, так как $\lim\limits_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

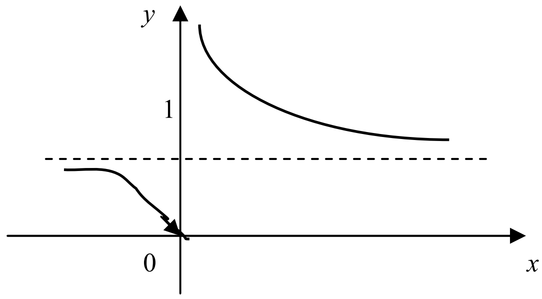


Рис. 22.

Наклонные асимптоты

Прежде всего нужно сказать, что если область определения функции ограниченное множество, то такая функция наклонных асимптот иметь не может. Например, функция $y = \ln(1-x^2)$, область определения которой (-1; 1), наклонных асимптот не имеет.
Так как асимптота – прямая линия, то ее уравнение ищем в виде $y=kx+b$, где

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пределы функции при $x\to\infty$ и $x\to-\infty$ могут не совпадать, т.е. правая и левая наклонные асимптоты могут быть разными.
ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если предел для k не существует, то делаем вывод об отсутствии соответствующей наклонной асимптоты и предел для b не вычисляем. Если же k существует, то переходим к вычислению предела b и из его наличия делаем вывод о наличии асимптоты.
ЗАМЕЧАНИЕ 3. *Горизонтальные* асимптоты являются частным случаем наклонных при k=0, т.е. $y=b$.
Например, на рис. 21 y=0, а на рис. 22 y=1 являются горизонтальными асимптотами.

ПРИМЕР 3. Найти асимптоты функции $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

РЕШЕНИЕ. Так как функция определена повсюду, т.е. для любых значений x, то вертикальных асимптот она не имеет.
Наклонные асимптоты у нее могут быть, так как область определения не ограничена: $x \in (-\infty;\infty)$.
Находим

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{\left(x^2+1\right)\cdot x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{2x} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (\frac{x^3}{x^2+1} - 1\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x} = 0.$$

Следовательно, правая и левая наклонные асимптоты имеют уравнение $y=1x+0$, т.е. $y=x$ (рис. 23).

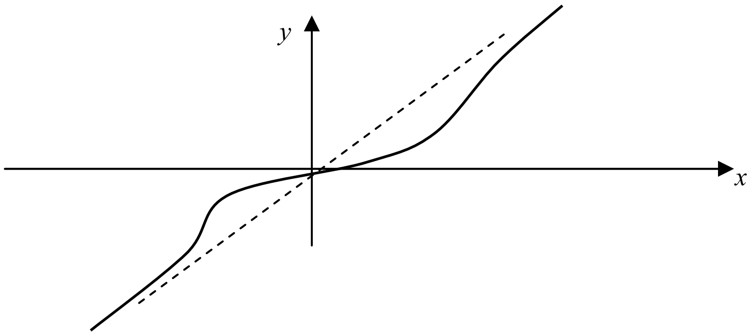


Рис. 23.

2.2.7 Схема исследования функции при построении ее графика

При исследовании функции рекомендуется придерживаться следующего плана:

1. Нахождение области определения функции.
2. Исследование поведения функции на концах области определения. Вертикальные асимптоты. Наклонные асимптоты.
3. Четность функции.
4. Периодичность функции.
5. Исследование функции на монотонность и экстремум.
6. Исследование функции на выпуклость и вогнутость, точки перегиба.
7. Нахождение точек пересечения графика с осями координат.
8. Поиск дополнительных точек графика.
9. Построение графика.

Реализацию этого плана рассмотрим на примере.

ПРИМЕР 4. Исследовать функцию $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$ и построить ее график.

РЕШЕНИЕ.

1. Область определения $x \in \left(-\infty;\infty\right)$, т.е. функция определена всюду.

2. Вертикальных асимптот нет, так как $x \in R$. Находим наклонные асимптоты. $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+6x^2+9x+4}{x} = \infty$, а это означает, что наклонных асимптот у графика нет. Находим пределы функции при $x \to \pm\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+6x^2+9x+4\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3+6x^2+9x+4\right) = \infty$. Так как функция определена на всей числовой оси, то два последних предела говорят, что область изменения функции $\left(-\infty;\infty\right)$.

3. Функция общего вида, так как $f\left(-x\right) \neq f\left(x\right)$ и $f\left(-x\right) \neq -f\left(x\right)$.

4. Функция периодичностью не обладает.

5. Находим первую производную функции $y' = 3x^2 + 12x + 9$. Решая уравнение $3x^2 + 12x + 9 = 0$, получаем две критические точки $x_1 = -3$ и $x_2 = -1$. Других критических точек нет, так как y' определена всюду. Результаты исследования на монотонность и экстремум оформляем в виде таблицы.

x	$\left(-\infty;-3\right)$	-3	$\left(-3;-1\right)$	-1	$\left(-1;\infty\right)$
y'	+	0	-	0	+
y	возрастает	4 max	убывает	0 min	возрастает

6. Находим вторую производную функции: $y'' = 6x + 12$. Решая уравнение $6x + 12 = 0$, получаем критическую точку x=-2. Других критических точек нет, так как y'' определена всюду. Результаты исследования на выпуклость и точки перегиба оформляем в виде таблицы.

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;\infty)$
y''	-	0	+
y	выпукла	2 перегиб	вогнута

7. Учитывая непрерывность функции на R и результаты исследования п.2, видим, что значения функции заполняют промежуток $y \in (-\infty;\infty)$.

8. Находим пересечение графика с осью Оу, решая систему уравнений $\begin{cases} y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4; \\ x = 0. \end{cases}$. Получаем точку (0;4). Пересечение с осью Ох получаем, решая систему уравнений $\begin{cases} y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4; \\ y = 0. \end{cases}$. Решение системы сводится к решению уравнения $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$. Ищем корень среди целых делителей свободного члена уравнения: $\pm 1; \quad \pm 2; \quad \pm 4$, подставляя их поочередно в уравнение. Таким корнем оказывается $x_1 = -1$. Делим выражение $x^3 + 6x^2 + 9x + 4$ на (x+1), получая в частном $x^2 + 5x + 4$. Остается найти корни уравнения $x^2 + 5x + 4 = 0$. Эти корни $x_2 = -1$; $x_3 = -4$. Таким образом, кривая пересекается с осью Ох в точках (-1;0) и (-4;0).

9. Необходимости в дополнительных точках нет.

10. Строим график в соответствии с результатами исследования.

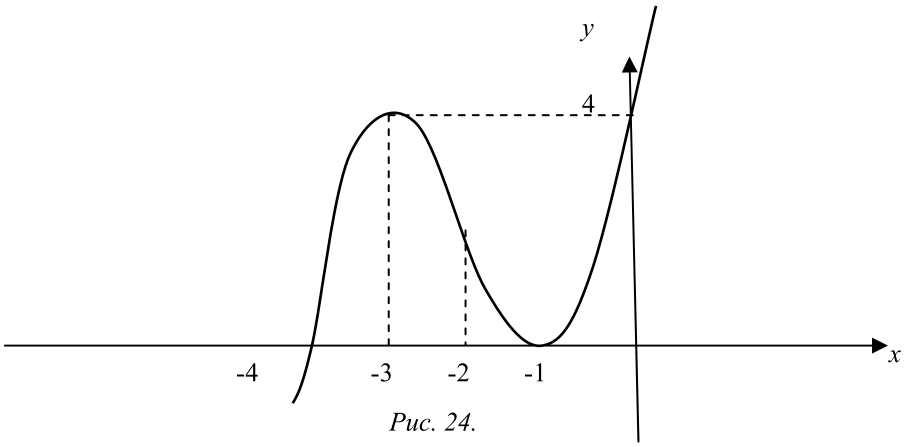


Рис. 24.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается правило Лопиталя? Перечислите основные типы неопределенности, для раскрытия которых может быть применено правило Лопиталя.
2. Каковы признаки возрастания и убывания функции?
3. Что называется экстремумом функции?
4. Как находятся интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба кривой?
5. Дайте определение асимптот функции. Назовите типы асимптот и методы нахождения их уравнений.
6. Приведите порядок исследования функции и построения ее графика.

Тестовые задания

Найти экстремумы функций:

1. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$; Ответ: $y_{\min}(-1) = -\dfrac{1}{2}; \quad y_{\max}(1) = \dfrac{1}{2}$.
2. $y = x^2 \cdot e^{-x}$; Ответ: $y_{\min}(0) = 0; \quad y_{\max}(2) = 4 \cdot e^{-2}$.
3. $y = x \cdot \ln x$; Ответ: $y_{\min}\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$.

Найти точки перегиба:

1. $y = x^7 + 7x + 1$; Ответ: $(0;1)$.

2. $y = x \cdot e^{2x} + 1;$ Ответ: $\left(-1; 1-e^{-2}\right)$.

Найти асимптоты:

1. $y = \sqrt[5]{\dfrac{x}{x-2}};$ Ответ: $x = 2;\quad y = 1.$

2. $y = x \cdot \ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right);$ Ответ: $x = -\dfrac{1}{e};\quad y = x + \dfrac{1}{e}.$

3. $y = 2x + arctgx;$ Ответ: $y = 2x + \dfrac{\pi}{2};\quad y = 2x - \dfrac{\pi}{2}.$

Основная литература по теме

1. *Высшая математика*: Учебное пособие для студентов заочной формы обучения / Каленкович Е.Е., Соболев В.Ф., Владимиров Ю.Н., Колодко Л.С., Смилянский В.Р., Шитов К.В., Чиркунов Ю.А. – Новосибирск: НГАЭиУ, 1997. – гл. 3. – п.п. 4–10.
2. *Шипачев В.С.* Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1990. – гл. 5. – п.п. 1–10; гл. 6. – п.п. 1–4.
3. *Шипачев В.С.* Задачник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000. – гл. 5. – п.п. 1–4, 6, 7.

2.2.8. Предварительные сведения о функциях двух переменных

До сих пор мы рассматривали функции одной вещественной переменной. При рассмотрении многих вопросов естествознания приходится иметь дело с такими зависимостями между переменными величинами, в которых числовые значения одной из них полностью определяются значениями нескольких других. Так, например, площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y, определяется значениями двух переменных: $S=S(x, y)=x \cdot y$, а объем V прямоугольного параллелепипеда с ребрами, длины которых равны x, y, z – значениями трех переменных $V=V(x, y, z)=x \cdot y \cdot z$. Примеров таких зависимостей можно привести сколько угодно.

Эта глава посвящается рассмотрению такого рода зависимостей. Для простоты изложения вводится понятие функции двух вещественных переменных и даются методики исследования таких функций.

Пусть D – произвольное множество точек плоскости $R^2 = \{(x, y): x \in R, y \in R\}$. Если каждой точке $P=P(x, y) \in D$ поставить в соответствие некоторое вполне определенное вещественное число $z=f(P)=f(x, y)$, то говорят, что на множестве D задана числовая функция f двух вещественных переменных x и y. Множество D при этом называется областью определения, а множество $E=\{z \in \mathrm{R}: z=f(\mathrm{P}), P=P(x, y) \in D\}$ – областью значений функции $z=f(P)$.

Способы задания функций двух переменных, как и в случае одной переменной, могут быть различными. В примерах, приведенных ниже, мы используем аналитический способ задания, т.е. функции задаются с помощью некоторых формул. Областью определения функции в этом случае считается множество всех точек плоскости, для которых эта формула имеет смысл.

Рассмотрим примеры функций двух переменных.

ПРИМЕР 1. Пусть $z = x^2 + y^2$. Областью определения данной функции является вся плоскость, а областью значений – промежуток $[0; +\infty)$.

ПРИМЕР 2. Пусть $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Областью определения данной функции является множество всех точек плоскости, для которых выражение $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ определено, т.е. множество точек, для которых $1 - x^2 - y^2 \ge 0$ или $x^2 + \mathrm{y}^2 \le 1$. Множество таких точек образует замкнутый круг с центром в начале координат и радиусом 1. Множество значений функции представляет собой отрезок [0; 1].

ПРИМЕР 3. Пусть $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$. Областью определения данной функции является множество всех точек плоскости, для которых $x^2 + \mathrm{y}^2 > 1$, т.е. множество точек, лежащих вне замкнутого круга с центром в начале координат и радиуса 1. Множество значений функции представляет собой промежуток $(0; +\infty)$.

Как отмечалось ранее, график функции одной вещественной переменной изображается на плоскости в виде линии, определенной уравнением $y=f(x)$. График функции двух переменных изображается в пространстве в виде поверхности, которая определяется уравнением $z=f(x, y)$.

ПРИМЕР 4. Как известно из аналитической геометрии, уравнение $2x+3y-z+6 = 0$ задает плоскость в пространстве. Данная плоскость есть график функции $z=2x+3y+6$.

Построение графиков функций двух вещественных переменных во многих случаях представляет значительные трудности.

Важную роль в дальнейшем играют так называемые линейные функции (формы), т.е. функции вида

$$z = L(x, y) = ax + b, \quad P{=}P(x, y) \in D = R^2,$$

где a и b – фиксированные числа, а также квадратичные функции (формы), т.е. функции вида

$$z = Q(x, y) = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2, \quad P{=}P(x, y) \in D = R^2,$$

отвечающие симметричной матрице

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \ (b_{12} = b_{21}).$$

В аналитической геометрии графики этих функций изучаются достаточно подробно.

2.2.9. Предел и непрерывность функций двух переменных

Число A называется пределом функции $z{=}f(x, y)$ при стремлении точки $P(x, y)$ к точке $P_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что из условия

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

вытекает неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon .$$

При этом пишут

$$A = \lim_{P \to P_0} f(P) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) .$$

Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями, функций одной вещественной переменной переносятся на случай функций двух переменных практически без изменений.

ПРИМЕР 5. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ y\to 3}}(2x^2y + 4xy^3 - 6y^5)$.

Искомый предел равен:

$$A = \lim_{\substack{x\to 2 \\ y\to 3}}(2x^2y + 4xy^3 - 6y^5) = 2\lim_{\substack{x\to 2 \\ y\to 3}}(x^2y) + 4\lim_{\substack{x\to 2 \\ y\to 3}}(xy^3) - 6\lim_{\substack{x\to 2 \\ y\to 3}}(y^5) = 2\cdot 2^2\cdot 3 + 4\cdot 2\cdot 3^3 - 6\cdot 3^5 = -1218.$$

ПРИМЕР 6. Выяснить, имеет ли функция $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ предел при $x \to 0, y \to 0$.

Пусть точка $P(x, y)$ стремится к точке $P_0(0, 0)$ по прямой $y = kx$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - k^2}{1 + k^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

Результат имеет различные значения в зависимости от выбранного коэффициента k и поэтому функция предела не имеет.

Функция $z{=}f(P)$ называется непрерывной в точке P_0, если выполнены следующие три условия:

1) функция $f(P)$ определена в точке P_0;
2) существует $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$;
3) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Функция $z{=}f(P)$ называется непрерывной в области, если она непрерывна в каждой точке этой области. Если в точке P_0 хотя бы одно из условий 1) – 3) нарушено, то P_0 называется точкой разрыва функции $f(P)$. Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва и т.д.

Заметим, что линейные и квадратичные функции являются непрерывными на всей плоскости R^2.

ПРИМЕР 7. Исследовать на непрерывность функцию

$$z = \frac{2x + y + 2}{x - y}.$$

Так как эта функция является отношением двух непрерывных функций, то она является непрерывной во всех точках плоскости R^2, за исключением точек, в которых знаменатель обращается в нуль. Поэтому она имеет линию разрыва – прямую $x–y = 0$.

2.2.10. Дифференцирование функций двух переменных

В дальнейшем мы будем рассматривать функции $z=f(P)$, определенные в некоторой области $M \subseteq R^2$.
Частной производной функции $z=f(P)=f(x, y)$ по переменной x в точке $P_0=P_0(x_0, y_0) \in M$ называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h},$$

а частной производной этой функции по переменной y в точке $P_0(x_0, y_0)$ называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h},$$

если указанные пределы существуют.
Функция $z=f(P)$ называется дифференцируемой в точке $P_0 \in M$, если

$$f(P)-f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0) + o(|P-P_0|),$$

где

$$\lim_{P\to P_0}\frac{o(|P-P_0|)}{|P-P_0|} = 0.$$

Вектор $\nabla f(P_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0);\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right)$ называется градиентом функции $z=f(P)$ в точке P_0. Линейная часть $df(P_0)$ приращения $f(P)-f(P_0)$ называется первым дифференциалом функции $z=f(P)$ в точке P_0. Таким образом, формула первого дифференциала имеет вид:

$$df(P_0) = L(dx; dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)dy.$$

Пусть функция $z=f(P)$ имеет первую частную производную по переменной x в любой точке $P \in M$. Рассмотрим функцию $\varphi(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)$, определенную на множестве M. Если существуют производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P_0)$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(P_0)$, то они называются вторыми частными производными (производными второго порядка) функции f в точке P_0 и обозначаются

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0),\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(P_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0).$$

Совершенно аналогично определяются вторые частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)$. При этом, если смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P)$ непрерывны в точке P_0, то они равны между собой в данной точке и, следовательно, матрица вторых производных

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \end{pmatrix}$$

является симметричной.

Предположим теперь, что функция $z=f(P)$ имеет непрерывные вторые частные производные на множестве M. В этом случае справедливо равенство

$$f(P)-f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)(y-y_0)^2\right] + o(|P-P_0|^2),$$

где

$$\lim_{P\to P_0}\frac{o(|P-P_0|^2)}{|P-P_0|^2} = 0.$$

Отвечающая матрице B квадратичная форма

$$d^2f(P_0) = Q(dx;\, dy) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)\,dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)\,dy^2$$

называется вторым дифференциалом функции $z=f(P)$ в точке P_0.

ЗАДАЧА 1. Найти градиент, первый дифференциал, матрицу вторых производных, второй дифференциал функции $z=2x^3-3x^2y+5y^2$ в точке $(x_0;\, y_0) = (1;\, -1)$.

РЕШЕНИЕ. Находим частные производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6x^2-6xy,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-3x^2+10y;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x-6y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10.$$

Вычисляем значения функции и ее частных производных в точке $(x_0;\, y_0) = (1;\, -1)$:

$$z_0=z(1;\, -1) = 10;\ \frac{\partial z}{\partial x}(1;\, -1) = 12;\ \frac{\partial z}{\partial y}(1;\, -1) = -13;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1;\, -1) = 18;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1;\, -1) = -6;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1;\, -1) = 10.$$

Последовательно находим градиент, первый дифференциал, матрицу вторых производных, второй дифференциал:

$$\nabla z(1;\, -1) = (12;\, -13);$$

$$dz(1;\, -1) = 12dx-13dy;$$

$$B = \begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix};$$

$$d^2z(1;\, -1) = 18dx^2-12dxdy+10dy^2.$$

2.2.11. Экстремумы функций двух переменных

Основные определения

Точка $P_0=P_0(x_0,\, y_0)\in M$ называется точкой локального минимума (максимума) функции $z=f(P)$, если существует такое $\delta>0$, что из условия

$$P=P(x,\, y) \in M,\ 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

следует, что $f(P_0)\le f(P)$ (соответственно $f(P_0)\ge f(P)$).

Точки локального минимума и локального максимума функции $z=f(P)$ принято называть точками локального экстремума или, проще, точками экстремума. Значение функции в каждой такой точке называют экстремумом.

Необходимые условия экстремума

ТЕОРЕМА 1. Если точка P_0 является точкой локального экстремума функции $z=f(P)$ и в ней существуют частные производные первого порядка, то они равны нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)=0.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если функция $z=f(P)$ дифференцируема в точке локального экстремума P_0, то ее градиент равен нулю в этой точке:

$$\nabla f(P_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(P_0\right); \frac{\partial f}{\partial y}\left(P_0\right)\right)=(0;\ 0).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если функция $z=f(P)$ дифференцируема в точке локального экстремума P_0, то ее первый дифференциал равен нулю в этой точке:

$$df(P_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)dy=0.$$

Приведенные условия экстремума принято называть необходимыми условиями. Эти условия не являются достаточными, т.е. из равенства $df(P_0)=0$, вообще говоря не следует, что P_0 является точкой локального экстремума. Точки, в которых первый дифференциал обращается в нуль, называются стационарными точками функции $z=f(P)$.

Достаточные условия экстремума

Чтобы сформулировать достаточные условия экстремума, введем в рассмотрение величины

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)\right)^2, \; b_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0).$$

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что функция $z=f(P)$ имеет непрерывные вторые частные производные в некоторой окрестности стационарной точки P_0. Тогда если $\Delta>0$, то P_0 является точкой локального экстремума, а именно – локального минимума при $b_{11}>0$ и локального максимума при $b_{11}<0$. Если $\Delta<0$, то P_0 не является точкой локального экстремума. Если же $\Delta=0$, то требуется дополнительное исследование.

ЗАДАЧА 2. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+3xy^2-15x-12y, P(x,y)\in D=R^2$.

РЕШЕНИЕ. Находим частные производные первого порядка и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+3y^2-15=0, \\ \frac{\partial z}{\partial y}=6xy-12=0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2=15, \\ 6xy=12. \end{cases}$$

Решая систему, получим четыре стационарные точки: $P_1(1;\,2)$, $P_2(2;\,1)$, $P_3(-1;\,-2)$, $P_4(-2;\,-1)$.
Находим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x$$

и составляем матрицу

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

для каждой стационарной точки.
Для точки P_1:

$$B_1=\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $\Delta_1=-108$ меньше нуля, значит в точке P_1 экстремума нет.
Для точки P_2:

$$B_2=\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $\Delta_2=108$ больше нуля и $b_{11}=12>0$, значит P_2 – точка локального минимума.
Минимум этот равен $z_{\min}=z(2;\,1)=-28$.
Для точки P_3:

$$B_3 = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $\Delta_3 = -108$ меньше нуля, значит в точке P_3 экстремума нет.
Для точки P_4:

$$B_4 = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $\Delta_4 = 108$ больше нуля и b_{11}=–12<0, значит P_4 – точка локального максимума. Максимум этот равен $z_{\max} = z(-2; -1) = 28$.

Контрольные вопросы

1. Область определения и график функции двух переменных.
2. Предел функции двух переменных.
3. Непрерывность функции двух переменных.
4. Частные производные первого порядка функции двух переменных.
5. Дифференцируемость функции двух переменных.
6. Первый дифференциал функции двух переменных.
7. Частные производные второго порядка функции двух переменных.
8. Второй дифференциал функции двух переменных.
9. Матрица вторых производных функции двух переменных.
10. Безусловный экстремум функции двух переменных. Классический метод нахождения экстремумов функции двух переменных.

Основная литература по теме

1. Высшая математика: Учебное пособие для студентов заочной формы обучения / Каленкович Е.Е., Соболев В.Ф., Владимиров Ю.Н., Колодко Л.С., Смилянский В.Р., Шитов К.В., Чиркунов Ю.А. – Новосибирск: НГАЭиУ, 1997. – гл. 4.
2. *Шипачев В.С.* Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1990. – гл. 11. – п.п. 1–4.
3. *Шипачев В.С.* Задачник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000. – гл. 11. – п.п. 1, 2.

ТЕМА 2.3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2.3.1. Неопределенный интеграл. Основные понятия и определения

Интегрированием называется операция, обратная дифференцированию. Пусть задана функция $f(x)$.
Спрашивается: какова функция $\Phi(x)$, производная которой равна $f(x)$, т.е. $\dfrac{d\Phi(x)}{dx} = f(x)$?
Операция нахождения такой функции $\Phi(x)$ по заданной функции $f(x)$ называется *интегрированием*, а сама функция $\Phi(x)$ – *первообразной.* Пусть $\dfrac{d\Phi(x)}{dx} = f(x)$, а C – произвольная постоянная. Тогда, как известно, $\dfrac{d}{dx}(\Phi(x)+C) = \dfrac{d\Phi(x)}{dx} + \dfrac{dC}{dx} = f(x) + 0 = f(x)$. Из этого следует, что: 1) $\Phi(x)+C$ – тоже первообразная, т.е. что первообразных бесконечно много; 2) две первообразные $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ могут отличаться друг от друга только на аддитивную константу *C*.
Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называют *неопределенным интегралом,* а операцию интегрирования обозначают в виде $\int f(x)dx$. Если под $F(x)$ понимать неопределенный интеграл (т.е. совокупность всех первообразных), то

$$F(x) \equiv \int f(x)dx = \Phi(x) + C,$$

где $f(x)$ – называют *подынтегральной функцией*, а x – *переменной интегрирования.* Заметим также, что дифференциал $dF(x) = f(x)dx$. Поэтому неопределенным интегралом можно также называть такую функцию $F(x)$, дифференциал которой равен $f(x)dx$.
Для всякой ли функции $f(x)$ существует первообразная?

ТЕОРЕМА (существования). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $a \le x \le b$, *то она имеет первообразную на этом отрезке (а значит и неопределенный интеграл).*

Как найти неопределенный интеграл?

Общего ответа на этот вопрос не существует, т.е. нет правила или совокупности правил, позволяющих найти интеграл от *любой* элементарной функции. Более того, интеграл от элементарной функции не всегда выражается через элементарные функции. Например, таким интегралом является $\int e^{x^2} dx$. Ниже мы рассмотрим различные способы интегрирования, использующие как общие свойства неопределенного интеграла, так и свойства конкретных подынтегральных функций $f(x)$.

2.3.2. Табличные интегралы

Читателю уже известны «табличные» производные – таблица основных производных.

Она построена по принципу: $\frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x)$ – т.е. слева дана функция, а справа – ее производная.

Если это равенство «прочитать» справа налево, т.е. записать в форме $\int f(x)dx = \Phi(x) + C,$ то мы получим «табличные» интегралы – таблицу основных интегралов. Она имеет вид:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ , } (n \ne -1) \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| = C \quad (2)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (3)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (4)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (5)$$

$$\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C \quad (6)$$

$$\int ctgx dx = \ln|\sin x| = C \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (11)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (12)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \quad (13)$$

$$\ldots.\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + \mathrm{C} \quad (14)$$

Для того, чтобы успешно интегрировать, табличные интегралы и табличные производные следует помнить наизусть. Расширить класс функций, которые мы умеем интегрировать, нам помогут

2.3.3. Основные свойства неопределенного интеграла

1-е СВОЙСТВО. Пусть a – константа. Тогда

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx . \quad (15)$$

Т.е. постоянный множитель a можно выносить за знак интеграла. Другими словами: можно либо искать первообразную непосредственно функции $af(x)$, либо найти первообразную функции $f(x)$ и результат умножить на a.

ПРИМЕР 1. $\int 5x^4 dx = 5\int x^4 dx = 5\frac{x^5}{5} + C = x^5 + C$. Интеграл $\int x^4 dx$ – табличный – см. (1).

При этом $n=4$.

2-е СВОЙСТВО.

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx . \quad (16)$$

Т.е. интеграл от суммы (разности) двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равен сумме (разности) интегралов от каждой функции. Другими словами: можно либо искать первообразную непосредственно от функции $[f_1(x) \pm f_2(x)]$, либо найти первообразные от функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и их сложить (вычесть).

ПРИМЕР 2. $\int \left(x^4 + \cos x\right) dx = \int x^4 dx + \int \cos x dx = \frac{x^5}{5} + \sin x + C.$

Интеграл $\int \cos x dx$ – табличный – см. (4).

ЗАМЕЧАНИЕ. Произвольная постоянная после вычисления *каждого* интеграла не ставится. Обычно все постоянные суммируются и результат суммирования *C* записывается в окончательный ответ.
2-е свойство справедливо для алгебраической суммы любого *конечного* числа слагаемых.
Пусть α и β какие-то постоянные (числа). Непосредственным следствием 1-го и 2-го свойств является равенство

$$\int [\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] dx = \alpha \int f_1(x) dx + \beta \int f_2(x) dx . \tag{17}$$

ПРИМЕР 3. $\int (5x^4 + 3\cos x) dx = 5\int x^4 dx + 3\int \cos x dx = x^5 + 3\sin x + C$.

Выражение (17) справедливо для любого *конечного* числа слагаемых.
Найти искомый интеграл иногда позволяет

2.3.4. Интегрирование по частям

Пусть u и v – какие-то заданные функции *x*, а du и dv – их дифференциалы. Существует следующее соотношение:

$$\int u dv = uv - \int v du . \tag{18}$$

Соотношение (18) называют *формулой интегрирования по частям*. Основная идея при использовании формулы (18) состоит в следующем. Пусть необходимо найти интеграл $\int f(x) dx$. Подынтегральное выражение в этом интеграле можно множеством способов представить в виде произведения некоторой функции *u* на дифференциал *dv* другой функции *v*, т.е. $f(x)dx = udv$.
Пусть конкретные функции *u* и *v* нами выбраны. Тогда

$$\int f(x) dx \equiv \int u dv = uv - \int v du . \tag{19}$$

Если функции *u* и *v* выбраны удачно, то интеграл $\int v du$ в правой части (19) проще исходного или совпадает с табличным.

ПРИМЕР 4. Найдем $\int x e^x dx.$ Полагаем $u = x,\ dv = e^x dx$. Тогда $v = e^x$, $du = dx$, а

$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для того, чтобы фактически произвести интегрирование по частям, нужно не только представить $f(x)dx = udv$, но и знать *v*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотрим другой вариант представления $f(x)dx = udv$ в интеграле $\int x e^x dx.$ Пусть $u = e^x$, $dv = x dx$. Тогда $v = \frac{x^2}{2}$, $du = e^x dx$, а $\int x e^x dx = \frac{x^2 e^x}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^x dx$. В этом случае интеграл $\int v du$ ничуть не проще исходного. Выбор функций *u* и v неудачен.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Не для всякой подынтегральной функции $f(x)$ интегрирование по частям приводит к успеху.
Рассмотрим несколько примеров успешного интегрирования по частям.

$$\int x\sin x dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = \sin x\, dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C .$$

$$\int x\cos x dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = \cos x dx \\ du = dx & v = \sin x \end{bmatrix} = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C .$$

$$\int (\ln x) x^n dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & dv = x^n dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{bmatrix} =$$

$$= (\ln x)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{x} dx = (\ln x)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C, \quad (n \neq -1)$$

Иногда для получения результата нужно провести интегрирование по частям несколько раз.
ПРИМЕР 5.

$$\int x^2 e^x dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & dv = e^x dx \\ du = 2xdx & v = e^x \end{bmatrix} = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = \begin{bmatrix} u = 2x & dv = e^x dx \\ du = 2dx & v = e^x \end{bmatrix} =$$

$$= x^2 e^x - \left(2xe^x - 2\int e^x dx\right) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C \quad .$$

Мощным способом интегрирования является

2.3.5. Интегрирование методом замены переменной

Этот метод имеет два варианта: а) метод подстановки; б) метод подведения под знак дифференциала.

Метод подстановки

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$. Произведем в подынтегральном выражении замену переменной интегрирования x, положив

$$x = \varphi(\tau), \quad dx = \varphi'(\tau)d\tau , \tag{20}$$

где $\varphi(\tau)$, $\varphi'(\tau)$ – непрерывные функции, причем $x = \varphi(\tau)$ имеет обратную функцию $\tau = \psi(x)$ (значок $'$ означает производную). Подставляя (20) в интеграл $\int f(x)dx$, получим

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(\tau)]\varphi'(\tau)d\tau , \tag{21}$$

Подынтегральная функция (от τ) в правой части равенства (21) имеет другой вид нежели $f(x)$. Если замена $x = \varphi(\tau)$ выбрана удачно, то интеграл в правой части (21) проще исходного или совпадает с табличным. Пусть его первообразной является $\Phi(\tau)$, т.е.

$$\int f[\varphi(\tau)]\varphi'(\tau)d\tau \ = \ \Phi(\tau) + C. \tag{22}$$

Возвращаясь к переменной *x*, т.е. подставляя в правую часть (22) $\tau = \psi(x)$, находим первообразную исходного интеграла:

$$\int f(x)dx \ = \ \Phi(\psi(x)) + C . \tag{23}$$

ПРИМЕР 6. Найти $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$. Произведем замену (подстановку) $x = \tau^3$. Следовательно $dx = 3\tau^2 d\tau$. Подставляя оба этих выражения в подынтегральное выражение, последовательно получаем

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{3\tau^2 \sin\tau}{\tau^2} d\tau = 3\int \sin\tau d\tau = -3\cos\tau + C = -3\cos\sqrt[3]{x} + C .$$

Последнее потому, что $\tau = \sqrt[3]{x}$.

Подведение под знак дифференциала

Часто целесообразнее делать замену не в виде $x = \varphi(\tau)$ (как выше), а в виде $\tau = \psi(x)$.
Основная идея. Представим подынтегральное выражение $f(x)dx$ в виде $f(x)dx = g(\psi(x))\psi'(x)dx$, где $\psi(x)$ – некоторая подобранная нами функция, т.е.

$$\int f(x)dx \equiv \int g(\psi(x))\psi'(x)dx \equiv \int g(\psi(x))d\psi(x). \tag{24}$$

Произведем в (24) замену $\tau = \psi(x),\ d\tau = \psi'(x)dx$. Это приводит к выражению

$$\int f(x)dx = \int g(\tau)d\tau . \tag{25}$$

Если выбор функции $\psi(x)$ произведен удачно, то интеграл в правой части (25) проще исходного или табличный. Пусть его первообразной является $P(\tau)$, т.е.

$$\int g(\tau)d\tau \; = \; P(\tau) \; + C. \tag{26}$$

Возвращаясь к исходной переменной, т.е. подставляя в правую часть (26) $\tau = \psi(x)$, находим первообразную исходного интеграла:

$$\int f(x)dx \; = \; P(\psi(x)) + C . \tag{27}$$

ПРИМЕР 7. Найти $\int (\alpha \ln x + \beta)^n \dfrac{dx}{x}$, где α и β – какие-то числа (например, α =3, β =2) и постоянная $n \neq -1$, а в остальном произвольная.
В качестве $\psi(x)$ возьмем $\psi(x) = (\alpha \ln x + \beta)$. Тогда $d\psi(x) = \psi'(x)dx = \alpha \dfrac{dx}{x}$. Следовательно, исходный интеграл можно представить в виде:

$$\int \frac{(\alpha \ln x + \beta)^n}{x} dx = \frac{1}{\alpha} \int [\psi(x)]^n \psi'(x)dx \equiv \frac{1}{\alpha} \int [\psi(x)]^n d\psi(x).$$

Производя в правой части замену $\tau = \psi(x),\ d\tau = \psi'(x)dx \equiv d\psi(x)$, получаем:

$$\int \frac{(\alpha \ln x + \beta)^n}{x} dx = \frac{1}{\alpha} \int \tau^n d\tau = \frac{1}{\alpha} \frac{\tau^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(\alpha \ln x + \beta)^{n+1}}{\alpha(n+1)} + C .$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Фактически выше была произведена замена $\tau = (\alpha \ln x + \beta)$, так как мы положили $\tau = \psi(x) = (\alpha \ln x + \beta)$. Поэтому необязательно было явно выписывать интеграл $\dfrac{1}{\alpha} \int [\psi(x)]^n \psi'(x)dx$. Главное «увидеть» функцию $\psi(x)$ в структуре подынтегральной функции. *Ниже так и будем поступать.*
С другой стороны аналогичным образом (заменой $\tau = \psi(x)$) можно показать, что $\int [\psi(x)]^n \psi'(x)dx$ = $\dfrac{[\psi(x)]^{n+1}}{n+1} + C$, где $\psi(x)$ – *любая* функция, для которой интеграл существует.

ПРИМЕР 8. Найти $\int \dfrac{x^{n-1}}{a^2 + x^{2n}} dx$, где *a* и *n* – любые постоянные.

Произведем замену $\tau = x^n$, $d\tau = nx^{n-1}dx$. Отсюда $x^{n-1}dx = \dfrac{d\tau}{n}$. В результате имеем:

$$\int \frac{x^{n-1}}{a^2 + x^{2n}} dx \; = \; \frac{1}{n} \int \frac{d\tau}{\alpha^2 + \tau^2} \; = \; \frac{1}{n} \frac{1}{\alpha} arctg \frac{\tau}{a} + C \; = \; \frac{1}{n\alpha} arctg \frac{x^n}{a} + C \quad .$$

ПРИМЕР 9. Найти $\int (\alpha \sin x + \beta)^n \cos x dx$, где постоянная $n \neq -1$, а в остальном произвольна; α и β – произвольные числа.

Произведем замену $\tau = (\alpha \sin x + \beta)$, $d\tau = (\alpha \sin x + \beta)' dx = \alpha \cos x dx$; $\cos x dx = \dfrac{d\tau}{\alpha}$. Подставляя это в исходный интеграл, имеем:

$$\int (\alpha \sin x + \beta)^n \cos x dx = \frac{1}{\alpha} \int \tau^n d\tau = \frac{1}{\alpha} \frac{\tau^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(\alpha \sin x + \beta)^{n+1}}{\alpha(n+1)} + C \quad . \qquad (28)$$

Интеграл (28) включает в себя множество частных случаев. Например $\int \sqrt{2\sin x + 3} \cos x dx$, – это частный случай интеграла (28) при $n = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Проводя с ним те же преобразования, находим:

$$\int \sqrt{2\sin x + 3} \cos x dx = \frac{(2\sin x + 3)^{\frac{3}{2}}}{3} + C .$$

ПРИМЕР 10. Найти $\displaystyle\int \frac{3\cos x - 4\sin x}{3\sin x + 4\cos x} dx$.

Произведем замену: $\tau = (3\sin x + 4\cos x)$, $d\tau = (3\sin x + 4\cos x)' dx = (3\cos x - 4\sin x) dx$.
Подставляя это в исходный интеграл, имеем:

$$\int \frac{3\cos x - 4\sin x}{3\sin x + 4\cos x} dx = \int \frac{d\tau}{\tau} = \ln|\tau| + C = \ln|3\sin x + 4\cos x| + C$$

ПРИМЕР 11. Найти $\int e^{\sin^3 x} \sin^2 x \cos x dx$.

Произведем замену: $\tau = \sin^3 x$, $d\tau = 3\sin^2 x \cos x dx$, $\sin^2 x \cos x dx = \dfrac{d\tau}{3}$.
Подставляя это в исходный интеграл, имеем:

$$\int e^{\sin^3 x} \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \int e^{\tau} d\tau = \frac{1}{3} e^{\tau} + C = \frac{1}{3} e^{\sin^3 x} + C .$$

2.3.6. Интегрирование рациональных дробей

Пусть $Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0$ – многочлен *m*-й степени с коэффициентами b_0 , b_1 , … , b_m , а $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ – многочлен *n*-й степени. Рациональной дробью $R(x)$ называется отношение многочленов

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0} . \qquad (29)$$

Если степень числителя ниже степени знаменателя , то дробь называется *правильной ,* если выше или равна – *неправильной*. Если дробь неправильная, то разделив числитель на знаменатель (относительно правила деления многочленов – см. курс средней школы), можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби.

ПРИМЕР 12. $\dfrac{x^4-3}{x^2+2x+1}$. Это неправильная дробь. Выделим целую часть, деля числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{l|l} x^4-3 & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2} x^4+2x^3+x^2 & x^2-2x+3 \\ \hline \quad -2x^3-x^2-3 & \\ \quad -2x^3-4x^2-2x & \\ \hline \qquad 3x^2+2x-3 & \\ \qquad 3x^2+6x+3 & \\ \hline \qquad\quad -4x-6 & \end{array}$$

Следовательно: $\dfrac{x^4-3}{x^2+2x+1} = x^2-2x+3-\dfrac{4x+6}{x^2+2x+1}$.

Интегрирование многочленов не представляет затруднений. Поэтому ниже мы рассмотрим интегрирование *правильных* рациональных дробей.

Пусть все *n* корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ многочлена $P_n(x)$ действительны и различны. Тогда многочлены можно представить в виде

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n), \tag{30}$$

а правильную дробь $R(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ в виде

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-x_n}, \tag{31}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – постоянные коэффициенты. Подчеркнем, что (31) – *тождество*, т.е. выполняется при любых значениях x. В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} \int\frac{Q_m(x)}{P_m(x)}dx &= \int\left[\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-x_n}\right]dx = \\ &= \int\frac{A_1}{x-x_1}dx+\int\frac{A_2}{x-x_2}dx+\cdots+\int\frac{A_n}{x-x_n}dx = \\ &= A_1\ln|x-x_1|+A_2\ln|x-x_2|+\cdots+A_n\ln|x-x_n|+C \quad . \end{aligned} \tag{32}$$

Таким образом задача интегрирования фактически сводится к нахождению коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (см. ниже).

Если часть корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ многочлена $P_n(x)$ совпадает, то многочлен можно представить в виде

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_l)^{k_l} \qquad k_1+k_2+\cdots+k_l=n, \tag{33}$$

где k_1 – число одинаковых корней x_1; k_2 – число одинаковых корней x_2; и т.д. Число k_1 называется *кратностью* корня x_1 число k_2 – кратностью корня x_2, и т.д.

ПРИМЕР 13. Легко проверить, что $P_3(x)=x^3-5x^2+8x-4=(x-2)^2(x-1)$.

Корни $x_1, x_2, \ldots, x_l$ многочлена $P_n(x)$ по-прежнему предполагаются действительными.

В рассматриваемом случае правильную дробь $R(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ можно представить в виде

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_{(k_1-1)}}{(x-x_1)^{(k_1-1)}} + \dots + \frac{A_1}{(x-x_1)} +$$
$$+ \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \frac{B_{(k_2-1)}}{(x-x_2)^{(k_2-1)}} + \dots + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \tag{34}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{D_{k_l}}{(x-x_l)^{k_l}} + \frac{D_{(k_l-1)}}{(x-x_l)^{(k_l-1)}} + \dots + \frac{D_1}{(x-x_2)},$$

где A_i , B_i ,…, D_i – постоянные коэффициенты. Мы видим, что каждый множитель $(x-x_i)^{k_i}$ в (33) «порождает» столько соответствующих слагаемых, какова его кратность k_i. Выражение (34) является тождеством. Беря интеграл от обеих частей тождества (34), находим, что все сводится к интегралу типа

$$\int \frac{dx}{(x-x_i)^k} = \frac{1}{-k+1} \frac{1}{(x-x_i)^{k-1}} + C, \quad (k \neq 1). \tag{35}$$

(Случай $k=1$ уже рассмотрен выше – см. (32)). Таким образом и в этом случае задача интегрирования фактически свелась к нахождению коэффициентов A_i , B_i ,…, D_i .

Тождества (31), (34) называют разложением правильной рациональной дроби на простейшие дроби. Тождество (31) является частным случаем (34).

Покажем на конкретном примере как определяются коэффициенты разложения в (31), (34).

В соответствии с изложенным выше

$$\frac{x+5}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)}. \tag{36}$$

Умножим обе части этого тождества на знаменатель его левой части, т.е. на $(x+1)^2(x-2)$.

Это дает:

$$x+5 = A_2(x-2) + A_1(x+1)(x-2) + B(x+1)^2. \tag{37}$$

1-й способ. Раскрывая скобки в правой части (37) и приводя подобные, получим

$$x+5 = (A_1+B)x^2 + (A_2 - A_1 + 2B)x + (-2A_2 - 2A_1 + B). \tag{38}$$

Для того, чтобы выражение (38) было тождеством, нужно, чтобы слева и справа стояли одинаковые многочлены. Для этого их коэффициенты при одних и тех же степенях *x* должны быть равны. Приравнивая эти коэффициенты, получаем следующую систему уравнений:

При x^2: $A_1 + B = 0$.

При x: $A_2 - A_1 + 2B = 1$. (39)

При x^0: $-2A_2 - 2A_1 + B = 5$.

Ее решение: $A_2 = -\frac{4}{3}$; $A_1 = -\frac{7}{9}$; $B = \frac{7}{9}$. (40)

2-й способ. Тождество (37) выполняется при любых значениях *x*. Задавая в нем три различных *конкретных* значения *x* мы получим три уравнения относительно трех неизвестных A_1 , A_2 , B .

Пусть $x = -1, 0, 2$. Это дает

$$\begin{gathered}(x=-1):\ 4 = -3A_2; \\ (x=0):\ 5 = -2A_2 - A_1 + B; \\ (x=2):\ 7 = 9B.\end{gathered} \tag{41}$$

Система (41) эквивалентна системе (39).

2.3.7. Дополнительные примеры

ПРИМЕР 14. Найти $\int \frac{x+5}{(x+1)^2(x-2)}dx$.

Пользуясь разложением (36), (40), последовательно получаем

$$\int \frac{x+5}{(x+1)^2(x-2)}dx = \int \left[-\frac{4}{3}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{7}{9}\frac{1}{(x+1)} + \frac{7}{9}\frac{1}{(x-2)} \right] dx =$$

$$= -\frac{4}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{7}{9}\int \frac{dx}{(x+1)} + \frac{7}{9}\int \frac{dx}{(x-2)} = \frac{4}{3}\frac{1}{(x+1)} - \frac{7}{9}\ln|x+1| + \frac{7}{9}\ln|x-2| + C .$$

ПРИМЕР 15.

$$\int \left(5x^2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + 7 \cdot 2^x \right) dx = 5\int x^2 dx - 2\int x^{-\frac{2}{3}} dx + 7\int 2^x dx = 5 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + 7 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C .$$

ПРИМЕР 16. $\int x^4 \sqrt[5]{2+7x^5}\, dx$.

Методом подведения под знак дифференциала произведем замену переменной интегрирования: $2+7x^5 = u$. Тогда $du = 35x^4 dx$. *Везде ниже операцию замены переменной мы будем записывать следующим образом:*

$\left[\begin{array}{c} 2+7x^5 = u \\ du = 35x^4 dx \end{array} \right]$.

С учетом этого последовательно получаем:

$$\int x^4 \sqrt[5]{2+7x^5}\, dx = \left[\begin{array}{c} 2+7x^5 = u \\ du = 35x^4 dx \end{array} \right] = \frac{1}{35}\int u^{\frac{1}{5}} du = \frac{1}{35} \cdot \frac{u^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C = \frac{1}{42}\left(2+7x^2\right)^{\frac{6}{5}} + C .$$

ПРИМЕР 17.

$$\int \frac{e^{5x}}{\left(2+e^{5x}\right)^3} dx = \left[\begin{array}{c} 2+e^{5x} = u \\ du = 5e^{5x} dx \end{array} \right] = \frac{1}{5}\int u^{-3} du = \frac{1}{5} \cdot \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{10\left(2+e^{5x}\right)^2} + C .$$

ПРИМЕР 18.

$$\int \frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\begin{array}{c} \arcsin x = u \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right] = \int 2^u du = \frac{2^u}{\ln 2} + C = \frac{1}{\ln 2} 2^{\arcsin x} + C .$$

ПРИМЕР 19.

$$\int \frac{xdx}{x^4+9} = \left[\begin{array}{c} x^2 = u \\ du = 2xdx \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+3^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} arctg \frac{u}{3} + C = \frac{1}{6} arctg \frac{x^2}{3} + C .$$

ПРИМЕР 20.

$$\int ctg 9x dx = \int \frac{\cos 9x}{\sin 9x} dx = \left[\begin{array}{c} \sin 9x = u \\ du = 9\cos 9x dx \end{array} \right] = \frac{1}{9}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{9}\ln|u| + C = \frac{1}{9}\ln|\sin 9x| + C .$$

ПРИМЕР 21. $\int x^2 \ln x dx$.

Воспользуемся способом интегрирования по частям.

$$\int x^2\ln xdx=\begin{bmatrix} u=\ln x & dv=x^2dx \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\dfrac{x^3}{3}\end{bmatrix}=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3+C\,.$$

ПРИМЕР 22.

$$\int\arccos 5xdx=\begin{bmatrix} u=\arccos 5x, & dv=dx, \\ du=-\dfrac{5dx}{\sqrt{1-25x^2}}, & v=x.\end{bmatrix}=x\arccos 5x+5\int\frac{xdx}{\sqrt{1-25x^2}}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1-25x^2=q \\ dq=-50xdx\end{bmatrix}=x\arccos 5x-\frac{5}{50}\int\frac{dq}{\sqrt{q}}=x\arccos 5x-\frac{1}{10}\int q^{-\frac{1}{2}}dq=$$

$$=x\arccos 5x-\frac{1}{5}q^{\frac{1}{2}}+C=x\arccos 5x-\frac{1}{5}\left(1-25x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C\,.$$

ПРИМЕР 23.

$$\int x\cos 6xdx=\begin{bmatrix} u=x & dv=\cos 6xdx \\ du=dx & v=\dfrac{\sin 6x}{6}\end{bmatrix}=\frac{x\sin 6x}{6}-\frac{1}{6}\int\sin 6xdx=\begin{bmatrix} 6x=q \\ dq=6dx\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{x\sin 6x}{6}-\frac{1}{36}\int\sin qdq=\frac{x\sin 6x}{6}+\frac{\cos q}{36}+C=\frac{x\sin 6x}{6}+\frac{\cos 6x}{36}+C\,.$$

ПРИМЕР 24.

$$\int xarctg7xdx=\begin{bmatrix} u=arctg7x & dv=xdx \\ du=\dfrac{7dx}{49x^2+1} & v=\dfrac{x^2}{2}\end{bmatrix}=\frac{x^2}{2}arctg7x-\frac{7}{2}\int\frac{x^2dx}{49x^2+1}=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctg7x-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{49}\int\frac{\left(49x^2+1\right)-1}{49x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}arctg7x-\frac{1}{14}\int dx+\frac{1}{14}\int\frac{dx}{49x^2+1}=$$

$$=\begin{bmatrix} 7x=q \\ dq=7dx\end{bmatrix}=\frac{x^2}{2}arctg7x-\frac{x}{14}+\frac{1}{14\cdot 7}\int\frac{dq}{q^2+1}=\frac{x^2}{2}arctg7x-\frac{x}{14}+\frac{1}{98}arctgq+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctg7x-\frac{x}{14}+\frac{1}{98}arctg7x+C\,.$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение первообразной функции.
2. Докажите, что любые две первообразные одной и той же функции отличаются на постоянное слагаемое.
3. Что называется неопределенным интегралом?
4. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.
5. В чем состоит способ интегрирования по частям?
6. В чем состоит метод замены переменной?

Тестовые задания

1. Методом замены переменной показать, что $\displaystyle\int\frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}dx=\frac{2}{3}\left(3+\ln 7x\right)^{\frac{3}{2}}+C$.
2. Методом замены переменной показать, что $\displaystyle\int\frac{\cos 4xdx}{\sqrt[5]{3-7\sin 4x}}=-\frac{5}{112}\left(3-7\sin 4x\right)^{\frac{4}{5}}+C$.
3. Методом замены переменной показать, что $\displaystyle\int\frac{x^9}{4+x^{10}}dx=\frac{1}{10}\ln\left(4+x^{10}\right)+C$.

4. Методом интегрирования по частям показать, что $\int xe^{-5x}dx = -\dfrac{xe^{-5x}}{5} - \dfrac{e^{-5x}}{25} + C$.
5. Применяя изложенный выше способ интегрирования дробей, показать, что $\int \dfrac{4x+2}{(x-1)(x+2)}dx = 2\ln|x-1| + 2\ln|x+2| + C$.

2.3.8. Определенный интеграл. Основные понятия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть на отрезке $[a\,, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$) задана функция $y = f(x)$. Точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ разделим отрезок $[a\,, b]$ на n отрезков $[x_0\,, x_1], [x_1\,, x_2], \ldots, [x_{n-1}\,, x_n]$. На каждом из этих отрезков возьмем по одной произвольной точке: $c_1 \in [x_0, x_1]$, $c_2 \in [x_1, x_2], \ldots$, $c_n \in [x_{n-1}, x_n]$. Для каждого отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ (k=1,2,…,n) составим произведение $f(c_k)\Delta_k$ значения функции $f(x)$ в выбранной точке c_k на длину $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ этого отрезка. Сумма всех этих произведений

$$S_n = f(c_1)\Delta_1 + f(c_2)\Delta_2 + \cdots + f(c_n)\Delta_n$$

называется *интегральной суммой Римана* функции $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если при стремлении найбольшей из длин Δ_k (k=1, 2 , …, n) к нулю (а значит числа n отрезков Δ_i – к бесконечности) существует конечный предел последовательности интегральных сумм Римана функции $f(x)$, который не зависит от выбора точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, c_1, c_2, \ldots, c_n$, то этот предел называется *определенным от интегралом функции* $f(x)$ *от* a *до* b *и обозначается* $\int\limits_a^b f(x)dx$. При этом функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a\,, b]$.

Геометрический смысл определенного интеграла. Если $f(x) > 0$ на отрезке $[a\,, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции $aABb$ (см. рис. 1).

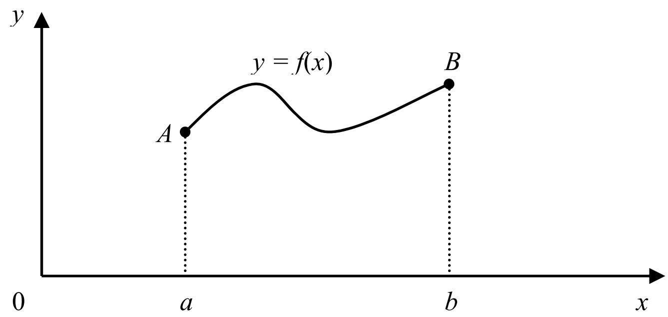


Рис. 1.

Выражение $\int\limits_a^b f(x)dx$ читается так: интеграл от a до b от функции $f(x)$ по dx; x называется *переменной интегрирования*; $f(x)$ *– подынтегральной функцией*; a *– нижним пределом*, b *– верхним пределом* интегрирования; отрезок $[a\,, b]$ *– отрезком интегрирования*; $f(x)dx$ *– подынтегральным выражением*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из определения определенного интеграла непосредственно следует:

1) $\int\limits_a^a f(x)dx \equiv 0$;

2) $\int\limits_a^b dx = b - a$ (так как $f(x) \equiv 1$).

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ. *Любая непрерывная на* $[a\,, b]$ *функция является интегрируемой на* $[a\,, b]$.

2.3.9. Основные свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$ (если поменять местами пределы интегрирования, то интеграл меняет знак).

2. Пусть интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует и $c \in (a\,,b)$ (т.е. $a < c < b$). Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx .$$

3. Пусть g – константа. Тогда

$$\int\limits_a^b gf(x)dx = g\int\limits_a^b f(x)dx$$ (т.е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла).

4. $\int\limits_a^b [f(x) + q(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b q(x)dx$ (т.е. интеграл от суммы равен сумме интегралов).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть α и β – константы. Тогда

$$\int\limits_a^b [\alpha f(x) + \beta q(x)]dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx + \beta\int\limits_a^b q(x)dx . \tag{42}$$

Это соотношение справедливо для любого *конечного* числа слагаемых.

2.3.10. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a\,,b]$. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(c\,,d) \supset [a\,,b]$ (т.е. $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (c\,,d)$), тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b \tag{43}$$

(напомним, что на отрезке $[a,b]$ переменная x принимает значения $a \le x \le b$ а в интервале (c,d): $c < x < d$). Формула (43) называется *формулой Ньютона-Лейбница. Она является основной формулой интегрального исчисления.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Запись $F(x)\Big|_a^b$ называется двойной подстановкой и является краткой символической записью разности $F(b) - F(a)$.

ПРИМЕР 1.

$$\int\limits_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 3\frac{3}{4} .$$

ПРИМЕР 2. Найти $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(3\cos x - \frac{4}{x}\right)dx$.

РЕШЕНИЕ. Применяя формулы (42) и (43) , последовательно получаем:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(3\cos x - \frac{4}{x}\right)dx = 3\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx - 4\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{x} = 3\sin x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} - 4\ln x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) - 4\ln 2 .$$

2.3.11. Интегрирование по частям

Для определенного интеграла справедливо следующее соотношение:

$$\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x), \tag{44}$$

где $u(x)v(x)\Big|_a^b=u(b)v(b)-u(a)v(a)$, а функции $u(x), v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a\,,b]$. Соображения, по которым подынтегральная функция $f(x)dx$ представляется в виде $u(x)dv(x)$, – такие же, как и в случае неопределенного интеграла.
ПРИМЕР 3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx=\begin{bmatrix} u=x & dv=\cos x dx \\ du=dx & v=\sin x\end{bmatrix}=\left(x\sin x\right)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin x dx=$$

$$=\left(x\sin x\right)\Big|_0^{\pi/2}+\cos x\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0\sin 0+\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0=\frac{\pi}{2}-1.$$

2.3.12. Замена переменной в определенном интеграле

1. *Метод подстановки*. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a\,,b]$, а функция $\varphi(\tau)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(\tau)$ на отрезке $[\alpha\,,\beta]$ $(-\infty<\alpha<\beta<\infty)$, причем $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ и множество значений функции $x=\varphi(\tau)$ совпадает с отрезком $[a\,,b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau\,. \tag{45}$$

Формула (45) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле.* При замене переменной в определенном интеграле, в отличие от неопределенного, не нужно возвращаться к старой переменной, так как пределы интегрирования по новой переменной также пересчитываются. Новые пределы интегрирования $\alpha,\ \beta$ получаются из решения следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a=\varphi(\alpha) \\ b=\varphi(\beta)\end{cases} \tag{46}$$

относительно $\alpha\,,\beta.$ Если функция $x=\varphi(\tau)$ немонотонна, то решение $\alpha\,,\beta$ может быть не единственным. Поэтому нужно выбирать такие решения системы (46), чтобы на отрезке $[\alpha\,,\beta]$ функция $x=\varphi(\tau)$ была монотонна.

ПРИМЕР 4. Вычислить $\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx$.

РЕШЕНИЕ. Произведем замену переменной: $x=r\sin\tau$. Тогда $d\tau=r\cos\tau d\tau$. Определим новые пределы: $x=0$ при $\tau=0,\ x=r$ при $\tau=\pi/2$. Следовательно

$$\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-r^2\sin^2\tau}\,r\cos\tau d\tau=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\tau}\cos\tau d\tau=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\tau d\tau=$$

$$=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos 2\tau)}{2}d\tau=\frac{r^2}{2}\left[\tau+\frac{\sin 2\tau}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{r^2}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)-\left(0+\frac{\sin 0}{2}\right)\right]=\frac{\pi r^2}{4}.$$

В преобразованиях использовано тригонометрическое тождество: $\cos^2\tau=\dfrac{1+\cos 2\tau}{2}$.

2. *Подведение под знак дифференциала*. Часто целесообразнее делать замену не в виде $x=\varphi(\tau)$ (как выше), а в виде $\tau=\psi(x)$.Представим подынтегральное выражение $f(x)dx$ в виде $f(x)dx=g(\psi(x))\psi'(x)dx$, где $\psi(x)$ – некоторая подобранная нами функция, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \int_a^b g(\psi(x))\psi'(x)dx \equiv \int_a^b g(\psi(x))d\psi(x). \tag{47}$$

Произведем в (47) замену $\tau = \psi(x)$, $d\tau = \psi'(x)dx$. Новые пределы α, β находятся из соотношений: $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$. В результате получаем:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta g(\tau)d\tau. \tag{48}$$

ПРИМЕР 5. Вычислить $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx$.

РЕШЕНИЕ. Произведем замену: $\tau = \frac{1}{x^2}$, $d\tau = -\frac{2}{x^3}dx$; $\tau = 1$ при $x = 1$, $\tau = \frac{1}{4}$ при $x = 2$.

Это дает: $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx = -\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{4}} e^\tau d\tau = -\frac{1}{2}e^\tau\Big|_1^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\left(e - e^{\frac{1}{4}}\right)$.

ПРИМЕР 6. Вычислить $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

РЕШЕНИЕ. Произведем замену: $\tau = \ln x$, $d\tau = \frac{dx}{x}$; $\tau = 0$ при $x = 1$, $\tau = 1$ при $x = e$.

Это дает: $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_0^1 \tau^2 d\tau = \frac{1}{3}\tau^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

2.3.13. Интегралы с бесконечными пределами

(Несобственные интегралы первого рода)

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в интервале $a \le x < +\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Несобственный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ определяется равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{49}$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; если же предел не существует или равен бесконечности, – *расходящимся*.

Пусть первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ известна. По формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Следовательно

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a). \tag{50}$$

ПРИМЕР 7. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctgb - arctg0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

Интеграл с бесконечным нижним пределом определяется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a) \tag{51}$$

(последнее, – если известна первообразная $F(x)$ функции $f(x)$). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в интервале $-\infty < x < +\infty$. Несобственный интеграл вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ определяется следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx, \tag{52}$$

где c – любое число. Определение (52) следует понимать так: если каждый из несобственных интегралов справа сходится , то интеграл слева сходится и равен сумме интегралов справа; если хотя бы один из интегралов справа расходится , то расходится и интеграл слева.

ПРИМЕР 8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_{-\infty}^{0} + arctgx\Big|_{0}^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В теории вероятностей важную роль играет *интеграл Пуассона*:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2.3.14. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур

Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a\,,b]$ и пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy . Площадь S плоской фигуры, ограниченной двумя вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ и двумя кривыми $y = f_1(x),\ x \in [a\,,b];\ y = f_2(x),\ x \in [a\,,b]$ вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_{a}^{b} [f_2(x) - f_1(x)]dx, \tag{53}$$

где предполагается, что $f_2(x) > f_1(x)$ на отрезке $[a\,,b]$ (см. рис. 2). В противном случае интеграл (53) будет равен отрицательному числу, а искомая площадь равна модулю этого числа (см. рис. 2).

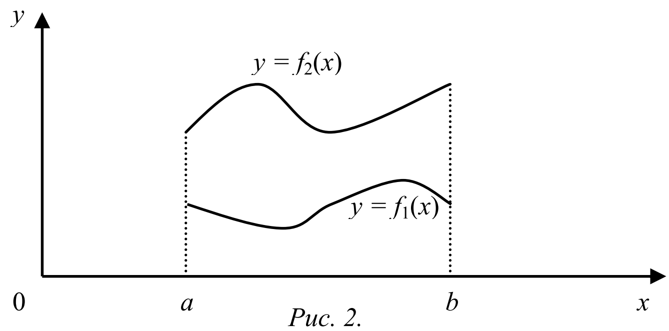
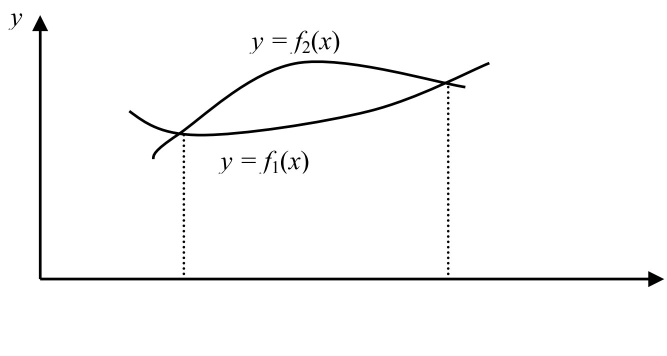


Рис. 2.

Возможна и другая постановка задачи. Пусть кривые $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ пересекаются в двух точках с абсциссами a и b (рис. 3). Найти площадь фигуры, заключенной между этими двумя кривыми.
Для этого сначала определяем a и b , решая следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \end{cases}. \tag{54}$$



0 a b x

Рис. 3.

Пусть a и b $(b > a)$ – решения системы (54). Тогда искомая площадь также определяется по формуле (53). Если между точками a и b нет других точек пересечения (это и предполагалось выше), то $f_2(x) > f_1(x)$ на отрезке $[a, b]$, если $f_2(c) > f_1(c)$, где c – какая-либо точка из интервала (a, b).

ПРИМЕР 9. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2$ и прямой $y = x - 2$.

РЕШЕНИЕ. Находим координаты точек пересечения параболы и прямой. Для этого решаем систему уравнений $\begin{cases} y = -x^2 \\ y = x - 2 \end{cases}$. Приравнивая правые части, получаем квадратное уравнение $-x^2 = x - 2$. Его решение: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Следовательно $y_1 = -4$, $y_2 = -1$ и значит координаты точек пересечения *A*(–2; –4), *B*(1; –1). Точка $x = 0$ находится между точками –2 и 1. Подставляя $x = 0$ в уравнение параболы, находим $y(0) = 0$. Для уравнения прямой $y(0) = -2$. Следовательно $f_2(x) = -x^2$, $f_1(x) = x - 2$, так как $f_2(0) > f_1(0)$. Подставляя полученные данные в формулу (53), последовательно получаем:

$$S = \int_{-2}^{1}\left[-x^2 - (x-2)\right]dx = \int_{-2}^{1}\left(-x^2 - x + 2\right)dx = -\int_{-2}^{1} x^2 dx - \int_{-2}^{1} x dx + 2\int_{-2}^{1} dx = -\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{1} - \left.\frac{x^2}{2}\right| + 2x\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2} \text{ кв. ед.}$$

ПРИМЕР 10. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной параболами $y = x^2 - x + 1$ и $y = 2x^2 - 2x + 1$.

РЕШЕНИЕ. Находим координаты точек пересечения парабол. Для этого решаем систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 - x + 1 \\ y = 2x^2 - 2x + 1 \end{cases}$. Приравнивая правые части, получаем квадратное уравнение $x^2 - x + 1 = 2x^2 - 2x + 1$. Его решение: $x_1 = 0,\ x_2 = 1$. Следовательно координаты точек пересечения *A*(0; 1), *B*(1; 1). В данном случае $f_2(x) = x^2 - x + 1$, $f_1(x) = 2x^2 - 2x + 1$, так как $f_2\left(\frac{1}{2}\right) > f_1\left(\frac{1}{2}\right)$.

Обе параболы обращены выпуклостью вниз, так как коэффициенты при x^2 у них положительны. Подставляя полученные данные в формулу (53) , последовательно получаем:

$$S = \int_{0}^{1}\left[\left(x^2 - x + 1\right) - \left(2x^2 - 2x + 1\right)\right]dx = \int_{0}^{1}\left(-x^2 + x\right)dx = -\int_{0}^{1} x^2 dx + \int_{0}^{1} x dx = \frac{1}{6} \text{ кв. ед.}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Иногда удобнее представить уравнение кривых, вычисляется по формуле, аналогичной формуле (53), а именно:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta}\left[\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\right]dy, \tag{55}$$

где α, β – либо ординаты точек пересечения кривых $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$, либо $y = \alpha$ и $y = \beta$ – горизонтальные прямые, ограничивающие данную плоскую фигуру, помимо кривых $x = \varphi_1(y)$, $y \in [\alpha, \beta]$ и $x = \varphi_2(y)$, $y \in [\alpha, \beta]$.

Предполагается, что $\varphi_2(y) > \varphi_1(y)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Контрольные вопросы

1. Что называется интегральной суммой Римана данной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a, b]$?
2. Что называется определенным интегралом данной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a, b]$?
3. Каковы основные свойства определенного интеграла?
4. Напишите формулу Ньютона-Лейбница.
5. В чем состоит метод замены переменной в определенном интеграле?
6. В чем состоит метод интегрирования по частям для вычисления определенного интеграла?
7. Что называется интегралом с бесконечными пределами (несобственным интегралом первого рода)?

8. Как с помощью определенного интеграла вычисляется площадь, заключенная между двумя кривыми?

Тестовые задания

1. Показать, что $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.
2. Применяя интегрирование по частям, показать, что $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$.
3. Применяя замену переменной (подведение под знак дифференциала), показать, что:

$a)\ \int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{1}{3}$; $b)\ \int\limits_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = e - \sqrt{e}$; $c)\ \int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{\pi}{8}$.

Основная литература по теме

1. Высшая математика: Учебное пособие для студентов заочной формы обучения / Каленкович Е.Е., Соболев В.Ф., Владимиров Ю.Н., Колодко Л.С., Смилянский В.Р., Шитов К.В., Чиркунов Ю.А. – Новосибирск: НГАЭиУ, 1997. – гл.5.
2. *Шипачев В.С.* Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1990. – гл.7. – п.п. 1–6; гл.8. – п.п. 1–9, 10 (п.1), 11 (п.1).
3. *Шипачев В.С.* Задачник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000. – гл. 6. – п.п. 1–6.

ТЕМА 2.4. РЯДЫ

2.4.1. Общие понятия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Рядом называется *упорядоченная пара* $\left(\{u_n\}_{n\ge n_0}, \{S_n\}_{n\ge n_0}\right)$ *последовательностей* $\{u_n\}_{n\ge n_0}$ и $\{S_n\}_{n\ge n_0}$, связанных между собой следующим образом: для всех $n \ge 0$

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \ . \tag{1}$$

(n_0 – заданное неотрицательное целое число).

При этом u_n называется *n*-членом (или общим членом) ряда, а S_n – n-й частичной суммой ряда.
Из соотношения (1) следует, что ряд, однозначно определяется своим общим членом.

В дальнейшем, если задан ряд с общим членом u_n, то будем писать $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ вместо пары последовательностей.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$. Его общий (или *n*-й член) имеет вид $u_n = n$, а *n*-я частичная сумма вычисляется по формуле суммы членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \ge 0).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ называется *числовым рядом*, если $\{u_n\}_{n\ge n_0}$ – последовательность вещественных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Степенным рядом* называется ряд вида $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$, где $\{a_n\}_{n\ge n_0}$ – последовательность вещественных чисел, а x – независимая вещественная переменная. Числа $a_n\ (n \ge n_0)$ называются *коэффициентами степенного ряда*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть N – натуральное число, тогда ряд $\sum\limits_{n=n_0+N}^{\infty} u_n$ называется остатком ряда $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$.

2.4.2. Числовые ряды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ – числовой ряд. Если существует конечный предел $S=\lim_{n\to\infty} S_n$ частичных сумм, то числовой ряд называется *сходящимся*, а число S – его *суммой*. Это обозначается следующим образом:

$$S=\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n .$$

В противном случае говорят, что ряд расходится (является *расходящимся*).
ТЕОРЕМА 1 Если ряд сходится, то он сходится.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ называется:

1) *положительным*, если $u_n>0$ для всех $n\ge n_0$;
2) *неотрицателъным*, если $u_n\ge 0$ для всех $n\ge n_0$;
3) *знакочередующимся*, если $u_n=(-1)^n a_n$ $u_n=(-1)^n a_n$, где a_n>0 для всех $n\ge n_0$, либо a_n<0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.Числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ называется:

1) *абсолютно сходящимся*, если сходится числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n|$;

2) *условно сходящимся*, если числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ сходится, а числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n|$ расходится.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если положительный или неотрнцательный числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n|$ сходится, то он сходится абсолютно, так как в этих случаях $|u_n|=u_n$. Для произвольных же числовых рядов из их сходимости, вообще говоря, не следует их абсолютная сходимость.

ТЕОРЕМА 2 (необходимый признак сходимости). Если числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ сходится, то тогда

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0 . \qquad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Равенство (2) не гарантирует сходимости числового ряда $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$.

СЛЕДСТВИЕ (достаточный признак расходимости). Если необходимое условие (2) сходимости числового ряда не выполнено, то есть $\lim_{n\to\infty} u_n\ne 0$ (в том числе и вовсе не существует), то ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ расходится.

ПРИМЕР 2. Доказать расходимость ряда $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n$.

В данном случае u^n=$(-1)^n$. $\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ – не существует, то есть необходимое условие (2) не выполнено.

Следовательно, данный ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n$ расходится на основании достаточного признака расходимости.

Рассмотрим некоторые достаточные признаки сходимости числовых рядов.
ТЕОРЕМА 3. Если числовой ряд сходится абсолютно, то он сходится.
ЗАМЕЧАНИЕ 4. В силу теоремы 3 рекомендуется начинать исследование числовых рядов на сходимость с, выяснения вопроса об их абсолютной сходимости.

ТЕОРЕМА 4 (признак сравнения). Пусть $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} v_n$ – неотрицательные числовые ряды.

И пусть существует целое число $N\ge 0$ такое, что $u_n\le v_n$ для всех $n\ge N$. Тогда:

1) если ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} v_n$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ сходится, причем $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n \le \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} v_n$;

2) если ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} v_n$ расходится.

ТЕОРЕМА 5. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ называемый обобщенным гармоническим рядом (при α =1 – гармоническим рядом), сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

ТЕОРЕМА 6. Числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ называемый геометрической прогрессией, абсолютно сходится при $|q|<1$ (в этом случае ряд называется бесконечно убывающей геометрической прогрессией) и расходится при $|q| \ge 1 \quad (a \ne 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Применение признака сравнения к исследованию неотрицательных числовых рядов на сходимость, как правило, связано со «сравнением» этих рядов либо с обобщенным гармоническим рядом, либо с геометрической прогрессией.

ТЕОРЕМА 7. (признак Даламбера). Пусть $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ – положительный числовой ряд. И пусть существует предел:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}, \tag{3}$$

Тогда если $\lambda < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ сходится; если $\lambda > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ расходится.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Признак Даламбера – наиболее часто используемый признак исследования положительных числовых рядов на сходимость. Однако следует помнить, что если в соотношении (З) число λ =1, то тогда данный числовой ряд нельзя исследовать на сходимость с помощью этого признака так же, как и в случае, когда предел (3) не существует.

ТЕОРЕМА 8. (признак Коши). Пусть $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ – положительный числовой ряд. И пусть существует предел

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \qquad .(4)$$

Тогда если $k<1$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ сходится; если $k>1$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ расходится.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Следует отметить, что при k=1 признак Коши не позволяет исследовать на сходимость такой числовой ряд.

ТЕОРЕМА 9. (интегральный признак) Пусть положительный числовой ряд имеет вид:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n), \tag{5}$$

где $f(n)$ есть значение при $x=n$ некоторой функции $f(x)$, определенной при $x \in [n_0, \infty)$. Если функция $f(x)$ непрерывна, положительна и монотонно убывает при $x \in [n_0, \infty)$, то тогда если сходится несобственный интеграл

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty} \int_{n_0}^{A} f(x), \tag{6}$$

то сходится и числовой ряд (5); если расходится несобственный интеграл (6), то расходится и числовой ряд (5).

ТЕОРЕМА 10 (признак Лейбница). Пусть $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n a_n$ — знакочередующийся числовой ряд. Если выполнены условия: 1) $|a_{n+1}| \le |a_n|$ для всех $n \ge n_0$; 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то тогда ряд сходится. Причем сумма ряда имеет знак первого члена ряда (т. е. знак члена a_0) и справедливо неравенство

$$\left|\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n a_n\right| \le |a_{n_0}|. \tag{7}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Исследование на сходимость знакочередующихся рядов, как об этом уже говорилось в замечании к теореме 3, следует начинать с изучения их абсолютной сходимости.
Если ряд абсолютно сходится, то в силу теоремы 3 он тем более сходится, и вопрос исчерпан.
Если же данный ряд не является абсолютно сходящимся, то тогда следует обратиться к признаку Лейбница для выяснения вопроса об условной сходимости ряда. Заметим также, что неравенство (7) широко применяют для оценки погрешности при вычислениях, а именно: если при вычислении суммы знакочередующегося числового ряда $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n a_n$ удовлетворяющего условиям теоремы 10, за приближение этой суммы взять частичную сумму S_N $(N \ge n_0)$, то абсолютная погрешность Δ_N не будет превосходить абсолютную величину первого из отброшенных членов, т. е.

$$\Delta_N \le |a_{N+1}|. \tag{8}$$

2.4.3. Степенные ряды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Степенной ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$ называется:

1. *сходящимся в точке* $x=x_0$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x_0{}^n$;
2. *абсолютно сходящимся в точке* $x=x_0$, если абсолютно сходится числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x_0{}^n$;
3. *расходящимся в точке* $x=x_0$, если расходится числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x_0{}^n$;
4. *условно сходящимся в точке* $x=x_u$, если условно сходится числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x_0{}^n$;
5. *сходящимся на множестве* $A \subseteq (-\infty,\infty)$, если он сходится в каждой точке этого множества;
6. *абсолютно сходящимся на множестве* $A \subseteq (-\infty,\infty)$, если он абсолютно сходится в каждой точке этого множества.
7. *расходящимся на множестве* $A \subseteq (-\infty,\infty)$, если он расходится враждой точке этою множества.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Из определения 8 и из теоремы 3 следует, что если степенной ряд абсолютно сходится на некотором множестве, то он сходится на этом множестве.
ЗАМЕЧАНИЕ 10. Из определения 8 следует, что степенной ряд всегда сходится в точке x=0. Более того, существует такое число $R \ge 0$, что степенной ряд сходится абсолютно при всех x, таких, что $|x| < R$, и расходится при всех x, таких, что $|x| > R$. Это число R называется радиусом сходимости степенного ряда, а интервал $(-R,R)$ — его интервалом сходимости.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x_0{}^n$ — степенной ряд. И пусть существует предел:

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}. \tag{9}$$

Тогда радиус сходимости данного степенного ряда определяется по формуле:

$$R = \begin{cases} L^{-1}, & \text{если } 0 < \mathrm{L} < \infty; \\ \infty, & \text{если } \quad \mathrm{L} = 0; \\ 0, & \text{если } \quad \mathrm{L} = \infty. \end{cases} \tag{10}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11. В концах интервала сходимости, т.е. в точках $x = -R$ и $x=R$ требуется в каждом конкретном случае проводить дополнительное исследование на сходимость соответствующих числовых рядов, пользуясь теоремами параграфа 2.

ТЕОРЕМА 12 (интегрирование степенных рядов). Пусть $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n x_0{}^n$ – степенной ряд, имеющий интервал сходимости (*–R, R*), Тогда для любого числа $b \in (-R, R)$ сумму данного степенного ряда можно почленно интегрировать в промежутке $[0, b]$ так, что

$$\int\limits_0^b \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} b^{n+1}, \tag{11}$$

причем числовой ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} b^{n+1}$ абсолютно сходится.

2.4.4. Разложение функций в степенные ряды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x=0$ производные всех порядков. Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{12}$$

называется *рядом Маклорена* для функции $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Если для всех $x \in (-R, R)$ функция $f(x)$ имеет производные всех порядков и совпадает с суммой своего ряда Маклорена:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n , \tag{13}$$

имеющего интервал сходимости (*–R, R*), то говорят, что $f(x)$ разлагается в ряд Маклорена. А формула (13) называется *разложением в ряд Маклорена функции* $f(x)$.

ТЕОРЕМА 13. Функция, представляемая степенным рядом (т.е. совпадающая с его суммой) в его интервале сходимости имеет в этом интервале сходимости производные всех порядков. Самый ряд по отношению к этой функции является не чем иным, как ее рядом Маклорена.

Возможность разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена зависит от скорости убывания ее n-й производной в зависимости от n. Приведем разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty, \infty); \tag{14}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots, \qquad x \in (-1,1); \tag{15}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty, \infty); \tag{16}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty, \infty); \tag{17}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots, \; x \in (-1,1), \quad \alpha \in (-\infty, \infty); \tag{18}$$

2.4.5. Дополнительные примеры

I. При помощи признака Даламбера исследовать на сходимость ряды.

ПРИМЕР 3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n(n+1)}$.

РЕШЕНИЕ. Общий член ряда $u_n=\frac{n}{3^n(n+1)}$. Член ряда u_{n+1} получится из u_n заменой в нем *n* на (*n*+1), *т.* е.

$u_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}(n+2)}$.

Вычисляем предел (3) из теоремы 7:

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n(n+1)}{3^n(n+2)n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{3}.$$

Так как $\lambda=\frac{1}{3}<1$, то по теореме 7 (случай 1) данный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n(n+1)}$ сходится.

ПРИМЕР 4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{4^n+5^n}$.

РЕШЕНИЕ. Общий член ряда $u_n=\frac{7^n}{4^n+5^n}$. Находим $u_{n+1}=\frac{7^{n+1}}{4^{n+1}+5^{n+1}}$,

Вычисляем предел (3) из теоремы 7:

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}(4^n+5^n)}{7^n(4^{n+1}+5^{n+1})}=7\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^n+1\right]}{5^{n+1}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}+1\right]}=\frac{7}{5}\cdot\frac{0+1}{0+1}=\frac{7}{5}.$$

Так как $\lambda=\frac{7}{5}>1$, то по теореме 7 (случай 2) данный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{4^n+5^n}$ расходится.

II. При помощи признака Коши исследовать на сходимость ряды.

ПРИМЕР 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$.

РЕШЕНИЕ. Общий член ряда $u_n = \arcsin^n \frac{1}{n}$. Вычислим предел (4) из теоремы 8:

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\arcsin^n \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \arcsin \frac{1}{n} = \arcsin 0 = 0.$$

Так как $k = 0 < 1$, то по теореме 8 (случай 1) данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$ сходится.

ПРИМЕР 6. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5n}{2n-1}\right)^n$.

РЕШЕНИЕ. Общий член ряда $u_n = \left(\frac{5n}{2n-1}\right)^n$. Вычислим предел (4) из теоремы 8:

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n}{n}}{\frac{2n}{n} - \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{5}{2-0} = \frac{5}{2}.$$

Так как $k = \frac{5}{2} > 1$, то по теореме 8 (случай 2) данный ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5n}{2n-1}\right)^n$ расходится.

III. При помощи интегрального признака исследовать на сходимость ряды.

ПРИМЕР 7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

РЕШЕНИЕ. Общий член ряда $u_n = \frac{1}{n \ln^2 n} = f(n)$, где $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$. Функция $f(x)$ при $x \in [2, \infty)$ непрерывна, положительна и монотонно убывает (последнее следует из того, что $f'(x) = -\frac{2 + \ln x}{x^2 \ln^3 x} < 0$ при $x \in [2, \infty)$). Исследуем на сходимость несобственный интеграл (6); имеем:

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{A\to\infty} \int_2^{A} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_2^A = \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln A} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Итак, данный несобственный интеграл сходится к $\frac{1}{\ln 2}$, следовательно, по теореме 9 исследуемый ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ сходится.

ПРИМЕР 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$.

РЕШЕНИЕ. Общий член ряда $u_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{\ln(n+1)}} = f(n)$, где $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$. Функция $f(x)$ при $x \in [1, \infty)$ непрерывна, положительна и монотонно убывает (последнее следует из того, что $f'(x) = -\left(\frac{1}{3} + \ln(x+1)\right) \cdot (x+1)^{-2} \left[\ln(x+1)\right]^{-\frac{4}{3}} < 0$ при $x \in [1, \infty)$). Исследуем на сходимость несобственный интеграл (6); имеем:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln(x+1)}} = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln(x+1)}} = \lim_{A\to\infty} \frac{3}{2}\left[\ln(x+1)\right]^{\frac{2}{3}}\Big|_2^A = \lim_{A\to\infty} \left(\ln^{\frac{2}{3}}(A+1) - \ln^{\frac{2}{3}}(2)\right) = \infty.$$

То есть несобственный интеграл расходится. Следовательно, по теореме 9 исследуемый ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$ расходится.

IV. При помощи признака Лейбница исследовать на сходимость знакочередующийся ряд.

ПРИМЕР 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

РЕШЕНИЕ. Общий член ряда $u_n=\frac{(-1)^n}{n}$. Сравнивая общий член этого ряда с общим членом ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ из теоремы 10, имеем: $\frac{(-1)^n}{n}=(-1)^n a_n$, следовательно $a_n=\frac{1}{n}$. Проверим условия признака Лейбница (теорема 10):

1. $|a_{n+1}|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}=|a_n|$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Таким образом, данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится по признаку Лейбница. Причем знак суммы этого ряда совпадает со знаком первого члена данного ряда $u_1=-1$, то есть сумма ряда отрицательна. А абсолютная величина суммы данного ряда не превосходит абсолютной величины первого члена ряда, то есть

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\right|\le|u_1|=1.$$

V. Написать три первых члена степенного ряда. Найти его интервал сходимости и исследовать его сходимость на концах интервала.

ПРИМЕР 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n x^n}{5^n\sqrt{n}}$.

РЕШЕНИЕ.

1. Задавая *n* значения (1, 2, 3), получим три первых члена степенного ряда. Имеем:

при *n*=1: $\frac{6^n x^n}{5^n\sqrt{n}}=\frac{6}{5}x$;

при *n*=2: $\frac{6^n x^n}{5^n\sqrt{n}}=\frac{6^2 x^2}{5^2\sqrt{2}}=\frac{18\sqrt{2}}{25}x^2$;

при *n*=3: $\frac{6^n x^n}{5^n\sqrt{n}}=\frac{6^3 x^3}{5^3\sqrt{3}}=\frac{72\sqrt{3}}{125}x^3$.

Итак, первые три члена степенного ряда таковы: $\frac{6}{5}x$; $\frac{18\sqrt{2}}{25}x^2$; $\frac{72\sqrt{3}}{125}x^3$.

2. Найдем интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n x^n}{5^n\sqrt{n}}$.

Коэффициент общего члена ряда $a_n=\frac{6^n x^n}{5^n\sqrt{n}}$, тогда $a_{n+1}=\frac{6^{n+1}x^{n+1}}{5^{n+1}\sqrt{n+1}}$.

Вычислим предел (9) из теоремы 11:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}5^n\sqrt{n}}{5^{n+1}\sqrt{n+1}6^n}=\frac{6}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=\frac{6}{5}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{6}{5}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}=\frac{6}{5}\cdot 1=\frac{6}{5}.$$

Следовательно, в соответствии с теоремой 11 радиус сходимости данного степенного ряда $R = L^{-1} = \frac{5}{6}$, а его интервал сходимости $\left(-\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$.

В силу теоремы 11 данный степенной ряд абсолютно сходится при $x \in \left(-\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$ и расходится при $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}, \infty\right)$.

Осталось исследовать ряд на сходимость на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x = -\frac{5}{6}$ и $x = \frac{5}{6}$. При $x = \frac{5}{6}$ получаем числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{5^n \sqrt{n}} \left(\frac{5}{6}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}},$$

который расходится в соответствии с теоремой 5. При $x = -\frac{5}{6}$ получаем числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{5^n \sqrt{n}} \left(-\frac{5}{6}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Этот ряд с общим членом $\tilde{a} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ удовлетворяет условиям признака Лейбница:

$$|\tilde{a}_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} = |\tilde{a}_{n+1}|; \qquad \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

и, следовательно, сходится (условно).

ПРИМЕР 11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{4^n + 5^n} x^n$.

РЕШЕНИЕ.

1. Задавая n значения 0, 1, 2, получим три первых члена степенного ряда: $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{9}x$; $\frac{49}{41}x^2$.

2. Найдем интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{4^n + 5^n} x^n$. Коэффициент общего члена ряда $a_n = \frac{7^n}{4^n + 5^n}$, тогда $a_{n+1} = \frac{7^{n+1}}{4^{n+1} + 5^{n+1}}$. Вычислим предел (9) из теоремы 11:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{n+1}(4^n + 5^n)}{7^n (4^{n+1} + 5^{n+1})} = \frac{7}{5} \quad (\text{см. пример } 2).$$

Следовательно, в соответствии с теоремой 11, радиус сходимости $R = L^{-1} = \frac{5}{7}$ и его интервал сходимости $\left(-\frac{5}{7}, \frac{5}{7}\right)$.

3. Исследуем сходимость ряда на концах интервала, т.е. при $x = -\frac{5}{7}$ и $x = \frac{5}{7}$. При $x = \frac{5}{7}$ получаем числовой ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{4^n+5^n}\left(\frac{5}{7}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{4^n+5^n},$$

который заведомо расходится, так как для него не выполняется необходимый признак сходимости (2) числового ряда, поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{4^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}=\frac{1}{0+1}=1\neq 0.$$

При $x=-\frac{5}{7}$ получаем числовой ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{4^n+5^n}\left(-\frac{5}{7}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{5^n}{4^n+5^n},$$

который также расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n5^n}{4^n+5^n}$ не существует.

VI. ПРИМЕР 12. Используя ряд Маклорена для функции $f(x)=a\sqrt[3]{1+x}$ (a – некоторое число), выразить величину $\sqrt[3]{30}$ в виде суммы сходящегося ряда. Найти приближенное значение этой величины, ограничиваясь тремя первыми членами. Оценить погрешность.

РЕШЕНИЕ. Воспользовавшись формулой (18), запишем разложение функции $f(x)=a\sqrt[3]{1+x}=a(1+x)^{1/3}$ в ряд Маклорена.

Имеем для всех $x\in(-1,1)$ и $\alpha=\frac{1}{3}$:

$$a\sqrt[3]{1+x}=a(1+x)^{1/3}=a\left[1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3+\ldots\right]=$$

$$=a\left[1+\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 6}x^3-\ldots\right]. \qquad (19)$$

Преобразуем $\sqrt[3]{30}$ так, чтобы можно было воспользоваться формулой (19)

$$\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{27+3}=\sqrt[3]{27\left(1+\frac{3}{27}\right)}=\sqrt[3]{3^3\left(1+\frac{3}{27}\right)}=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{1/3}. \qquad (20)$$

Воспользовавшись разложением (19) и полагая $a=3,\ x=\frac{1}{9}$, получаем выражение $\sqrt[3]{30}$ в виде суммы знакочередующегося абсолютно сходящегося ряда:

$$\sqrt[3]{30}=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{1/3}=3\left[1+\frac{1}{3}\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{5}{81}\left(\frac{1}{9}\right)^3-\ldots\right]=3+\frac{1}{9}-\frac{1}{243}+\frac{5}{19683}-\ldots. \qquad (21)$$

Ограничиваясь тремя первыми членами в формуле (21) находим приближенное значение $\sqrt[3]{30}$:

$$\sqrt[3]{30}\approx 3+\frac{1}{9}-\frac{1}{243}=\frac{755}{243}\approx 3{,}107. \qquad (22)$$

Так как при вычислении $\sqrt[3]{30}$ сумма знакочередующегося ряда была заменена суммой, его первых трех членов, то согласно замечанию к теореме (10), возникающая при этом абсолютная погрешность не превосходит абсолютной величины первого из отброшенных членов, т.е. $\Delta_1\le\frac{5}{19683}<0{,}0003$.

Кроме того, следует учесть погрешность Δ_2 от округления приближенного значения (22). Очевидно, что $\Delta_2 < 0{,}0005$, так как приближенное значение $\dfrac{755}{243} \approx 3{,}107$ содержит три верных десятичных знака. Отсюда погрешность вычисления: $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 < 0{,}0008 < 0{,}001$.

VII. ПРИМЕР 13. Используя ряд Маклорена для функции $f(x) = \ln(1+x)$, выразить величину In 1,17 в виде суммы сходящегося ряда. Найти приближенное значение этой величины, ограничиваясь двумя первыми членами ряда. Оценить погрешность.

РЕШЕНИЕ. Воспользовавшись формулой (15) запишем разложение функции $f(x) = \ln(1+x)$ в ряд Маклорена. Имеем для всех $x \in (-1,1)$ (формула (15)):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad . \tag{23}$$

Так как ln 1,17=ln (1+0,17), то, полагая в формуле (23) x=0,17, получим выражение ln 1,17 в виде суммы сходящегося ряда:

$$\ln 1{,}17 = \ln(1+0{,}17) = 0{,}17 - \frac{(0{,}17)^2}{2} + \frac{(0{,}17)^3}{3} - \ldots . \tag{24}$$

Ограничиваясь двумя первыми членами в формуле (24) находим приближенное значение ln 1,17:

$$\ln 1{,}17 \approx 0{,}17 - \frac{(0{,}17)^2}{2} = 0{,}17 - 0{,}01495 = 0{,}15505 .$$

Так как ряд (24) знакочередующийся, то ошибка найденного приближенного значения не превосходит абсолютной величины первого из отброшенных слагаемых ряда (24), т. е.

$$\Delta < \frac{(0{,}17)^3}{3} = \frac{0{,}004913}{3} < 0{,}00164 .$$

VII. Выразить определенные интегралы в виде сходящегося ряда, используя ряд Маклорена для подынтегральной функции. Найти приближенное значение этого интеграла с точностью до 0,001.

ПРИМЕР 14. $\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{\sin 10x}{x}\,dx$ **.**

РЕШЕНИЕ**.** Известно (формула 16), что

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Заменяя x на $10x$, получим:

$$\sin 10x = 10x - \frac{10^3 x^3}{3!} + \frac{10^5 x^5}{5!} - \frac{10^7 x^7}{7!} + \ldots \quad . \tag{25}$$

Далее, разделив почленно на x, будем иметь:

$$\frac{\sin 10x}{x} = 10 - \frac{10^3 x^2}{3!} + \frac{10^5 x^4}{5!} - \frac{10^7 x^6}{7!} + \ldots \quad . \tag{26}$$

Интегрируем обе части равенства (26) в указанных границах:

$$\int_0^{0,1} \frac{\sin 10x}{x}\,dx = \int_0^{0,1}\left[10 - \frac{10^3 x^2}{3!} + \frac{10^5 x^4}{5!} - \frac{10^7 x^6}{7!} + \ldots\right]dx = \left[10x - \frac{10^3 x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{10^5 x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{10^7 x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots\right]\Bigg|_0^{0,1} =$$

$$= 10 \cdot 0{,}1 - \frac{10^3 \cdot (0{,}1)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{10^5 \cdot (0{,}1)^5}{5 \cdot 5!} - \frac{10^7 \cdot (0{,}1)^7}{7 \cdot 7!} + \ldots = \tag{27}$$

$$= 1 - \frac{(10 \cdot 0{,}1)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(10 \cdot 0{,}1)^5}{5 \cdot 5!} - \frac{(10 \cdot 0{,}1)^7}{7 \cdot 7!} + \ldots = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{3528} + \ldots .$$

Если взять для вычислений первые три члена знакочередующегося ряда (27), то ошибка Δ_1, которая при этом произойдет, будет по абсолютной величине меньше модуля первого из отброшенных членов, т.е. $\Delta_1 < \frac{1}{3528} < 0{,}00003$. Кроме того, следует учесть погрешности от округления бесконечных десятичных дробей, которые нам встречаются.

Если каждую из них вычислять с четырьмя десятичными знаками, то погрешность для каждой дроби не превосходит 0,00005, а для суммы двух дробей $\left[\left(-\frac{1}{18}\right) + \frac{1}{600}\right]$ погрешность округления $\Delta_2 \le (0{,}00005)2 = 0{,}0001$. Тогда общая погрешность

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 < 0{,}00003 + 0{,}00013 < 0{,}001 .$$

Итак, $\int\limits_0^{0,1} \frac{\sin 10x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx 1 - 0{,}0556 + 0{,}00017 = 0{,}9451 \approx 0{,}945$.

ПРИМЕР 15. $\int\limits_0^{0,5} e^{-0,4x^2} dx$. Запишем разложение в ряд функции e^x (формула (14)):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty, \infty) .$$

Тогда

$$e^{-0,4x^2} = 1 - \frac{0{,}4x^2}{1!} + \frac{0{,}16x^4}{2!} - \frac{0{,}064x^6}{3!} + \ldots . \tag{28}$$

Интегрируя обе части равенства (28) в указанных границах, получим

$$\int\limits_0^{0,5} e^{-0,4x^2} dx = \int\limits_0^{0,5} \left(1 - \frac{0{,}4x^2}{1!} + \frac{0{,}16x^4}{2!} - \frac{0{,}064x^6}{3!} + \ldots\right) dx = \left[x - \frac{0{,}4x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{0{,}16x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{0{,}064x^7}{7 \cdot 3!} + \ldots \right]\Bigg|_0^{0,5} =$$

$$= 0{,}5 - \frac{0{,}4}{3}(0{,}5)^3 + 0{,}016\,(0{,}5)^5 - \frac{0{,}032}{21}(0{,}5)^7 + \ldots .$$

Проведем вычисления, оставив в каждой дроби четыре десятичных знака, т.е.

$$\int\limits_0^{0,5} e^{-0,4x^2} dx = 0{,}5000 - 0{,}0167 + 0{,}0005 - \ldots . \tag{29}$$

Абсолютное значение третьего члена знакочередующегося ряда (29) меньше 0,001. Поэтому, взяв за приближенное значение искомого интеграла сумму первых двух слагаемых, мы допустим погрешность $\Delta_1 \le 0{,}0005$. Кроме того, ошибка от округления второго слагаемого $\Delta_2 < 0{,}00005$. Тогда общая погрешность

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 < 0{,}0005 + 0{,}00005 = 0{,}00055 < 0{,}001$$

$$\int\limits_0^{0,5} e^{-0,4x^2} dx \approx 0{,}5000 - 0{,}0167 = 0{,}4833 \approx 0{,}483 .$$

Контрольные вопросы

1. Что такое ряд? Что такое частная сумма ряда? Что такое числовой ряд?
2. Что такое остаток ряда?
3. Что такое сходящийся числовой ряд? Что такое расходящийся числовой ряд?
4. Что можно сказать о сходимости остатка сходящегося ряда?
5. Что такое положительный ряд?

6. Что такое неотрицательный ряд?
7. Что такое знакочередующийся ряд?
8. Какой ряд называется абсолютно сходящимся?
9. Как связаны сходящиеся и абсолютно сходящиеся ряды?
10. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточный признак расходимости?
11. В чем заключается признак сравнения?
12. Что такое обобщенный гармонический и гармонический ряды? Когда обобщенный гармонический ряд сходится, и когда он расходится?
13. Что такое геометрическая прогрессия? Когда геометрическая прогрессия сходится, и когда геометрическая прогрессия расходится?
14. В чем состоит признак Даламбера?
15. В чем состоит признак Коши?
16. В чем состоит интегральный признак?
17. В чем состоит признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда? Как связаны сумма сходящегося знакочередующегося, удовлетворяющего условиям признака Лейбница, и первый член ряда? Как используется это при приближенных вычислениях?
18. Какой ряд называется условно сходящимся?
19. Что такое степенной ряд?
20. Что такое сходящийся (расходящийся) в точке и на множестве степенной ряд?
21. Что такое радиус сходимости и интервал сходимости степенного ряда?
22. По какой формуле вычисляются радиус сходимости степенного ряда?
23. Что такое ряд Маклорена для функции $f(x)$? Что означает, что функция разлагается в ряд Маклорена? Привести разложения в ряд Маклорена для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^{\alpha}$.
24. Сформулировать теорему об интегрировании степенных рядов?

Тестовые задания

1. Доказать расходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}$, пользуясь достаточным признаком расходимости ряда.
2. Пользуясь признаком сравнения доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$ сходится.
3. Пользуясь признаком сравнения, доказать, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n3^n}$ сходится.
4. Пользуясь признаком сравнения, доказать, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{1+2^{n-1}}$ расходится.
5. Пользуясь признаком Даламбера доказать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{5^n}$.
6. Пользуясь признаком Даламбера доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n+2^n}$ расходится.
7. Пользуясь признаком Коши, доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{\mathrm{n}}$ сходится.
8. Пользуясь признаком Коши, доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{2n+3}\right)^n$ расходится.
9. Пользуясь интегральным признаком, доказать, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ расходится.
10. Пользуясь интегральным признаком, доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+1}$ сходится.
11. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}$ с помощью признака Лейбница. Оценить сумму этого ряда.
12. Написать три первых члена степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. Найти его интервал сходимости и исследовать его сходимость на концах интервала.

Ответ: при $x \in (-1,1)$ ряд абсолютно сходится, при $x = -1$ ряд условно сходится, при $x \in (-\infty,-1) \bigcup [1,\infty)$ ряд расходится.

13. Используя ряд Маклорена для функции $f(x) = e^x$ выразить величину $\frac{1}{e}$ в виде сходящегося ряда. Найти приближенное значение этой величины, ограничиваясь тремя первыми членами. Оценить погрешность.

Ответ: $\frac{1}{e} \approx \frac{1}{2}; \quad \Delta_3 \le \frac{1}{6}$.

14. Выразить определенный интеграл $\int\limits_0^{0,1} e^{-x^2}\,dx$ в виде суммы сходящегося ряда, используя ряд Маклорена для подынтегральной функции. Найти приближенное значение этого интеграла с точностью до 0,000001.

Ответ: $\int\limits_0^{0,1} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{299}{3000}$.

Основная литература по теме

1. *Шипачев В.С.* Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1990. – гл.14. – п.п. 1–5.
2. *Шипачев В.С.* Задачник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000. – гл. 8. – п.п. 1–4.

ТЕМА 2.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.5.1. Основные понятия. Задача Коши

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее независимую переменную *x,* неизвестную функцию $y=y(x)$ и ее производные $y'=y'(x)$, $y''=y''(x),\ldots, y^{(n)} = y^{(n)}(x)$:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0, \tag{1}$$

где F — заданная функция своих аргументов.

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение (1), называется порядком дифференциального уравнения. В дальнейшем для краткости будем говорить о дифференциальных уравнениях, опуская термин «обыкновенные».

Если дифференциальное уравнение (1) разрешено относительно старшей производной, то оно имеет вид:

$$y^{(n)}= f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Решением дифференциального уравнения (1) называется функция $y=\varphi(x)$, $x\in(a,b)$ (числа a и b могут быть бесконечными), непрерывная на (a,b) вместе со своими производными до порядка n включительно, такая, что при подстановке в уравнение (1) вместо y этой функции, вместо $y', y'', \ldots, y^{(л)}$ производных функции $\varphi(x)$ получается тождество.

Дифференциальные уравнения имеют, как правило, бесконечное множество решений. Поэтому важным является вопрос о том, какие условия однозначно выделяют конкретное решение из бесконечной совокупности решений. Рассмотрим этот вопрос для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, то есть для уравнения вида:

$$y' = f(x, y) \tag{3}$$

где $f(x, y)$ – заданная функция, непрерывная по совокупности переменных x и y в некоторой области на плоскости (x, y). Эту область будем называть *областью определения уравнения* (3).

Будем рассматривать x и y как декартовы координаты точки на плоскости. Каждой точке (x, y) области определения уравнения (3) это уравнение ставит в соответствие определенное значение производной y'. Пусть $y=\varphi(x)$, $x\in(a,b)$ есть решение уравнения (3). Тогда кривая, определяемая уравнением $y=\varphi(x)$, $x\in(a, b)$, называется интегральной кривой дифференциального уравнения (3).

Рассмотрим теперь для уравнения (3) следующую задачу, называемую *задачей Коши*:

Из всех решений дифференциального уравнения (3) найти то решение $y=y(x)$, $x\in(a, b)$, которое при заданном значении независимой переменной x_0 принимает заданное значение y_0, т.е. $y(x_0)=y_0$, где заданные вещественные числа x_0, y_0 называются *начальными значениями*, а условие $y(x_0)=y_0$ называется *начальным условием* или *условием Коши*.

Задача Коши с геометрической точки зрения заключается в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку (x_0, y_0).

Теорема Коши – Пикара. Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет двум условиям:

1) она непрерывна в области $D=\{(x, y): |x-x_0|\le \alpha,\ |y-y_0|\le \beta\}$, где α, β – известные положительные числа;

2) ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ непрерывна в области D.

Тогда в интервале $x\in(x_0-h,\ x_0+h)$, где $h=\min\left(\alpha, \dfrac{\beta}{M}\right)$; $M=\max\limits_{(x,y)\in D}|f(x,y)|$ существует и притом единственное решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$. Из приведенной теоремы видно, что разрешимость задачи Коши для дифференциального уравнения (3) зависит от свойств его правой части.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Решение дифференциального уравнения (3) (интегральная кривая), в каждой точке которой сохраняется единственность решения задачи Коши, называется *частным решением*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Множество всех частных решений дифференциального уравнения называется *общим решением* этого уравнения.

Если правая часть уравнения $y'=f(x\ y)$ удовлетворяет условиям теоремы Коши – Пикара существования и единственности, то общее решение этого уравнения зависит от одной произвольной постоянной, т.е. имеет вид $y=\psi\ (x, c)$, где c – произвольная вещественная постоянная.

С геометрической точки зрения общее решение $y=\psi\ (x, c)$ дифференциального уравнения (3) есть вся совокупность его интегральных кривых.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.На практике при решении задачи Коши поступают, как правило, следующим образом:

1. находят общее решение $y=\psi\ (x, c)$ уравнения (3);
2. в полученное выражение для общего решения подставляют $x=x_0$, $y=y_0$, в результате получается уравнение $y=\psi\ (x_0, c)$ относительно неизвестного c;
3. решают полученное уравнение, находят $c=c_0$;
4. найденное значение $c=c_0$ подставляют в выражение для общего решения, получают искомое решение задачи Коши $y=\psi\ (x, c_0)$, т.е. решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка $y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, правая часть которого в некоторой области изменения аргументов удовлетворяет условиям соответствующей теоремы существования и единственности, зависит от n произвольных постоянных, т.е. имеет вид: $y=(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, где $c_1, c_2, \dots, c_n$ – произвольные вещественные постоянные. Частные решения получаются из общего при конкретных числовых значениях постоянных $c_1, c_2, \dots, c_n$.

В последующих параграфах рассмотрим некоторые конкретные типы дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

2.5.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида:

$$y'=f(x)g(y), \tag{4}$$

где $f(x)$, $g(y)$ – заданные функции своих аргументов.

Процесс отыскания общего решения уравнения (4) состоит в следующем.

1. Переписываем уравнение (4) в виде:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y). \tag{5}$$

2. Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx. \tag{6}$$

3. Интегрируем обе части уравнения (6). Получаем:

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+c. \tag{7}$$

   Равенство (7) и представляет собой неявным образам заданное семейство решений первоначального уравнения.

4. В процессе «разделения» переменных в уравнении (5) при делении его на $g(y)$ будут потеряны решения, обращающие эту функцию в нуль. Поэтому следует дополнительно решить уравнение $g(y)=0$ и его решения добавить к решениям, определенным по формуле (7). Окончательно получим общее решение дифференциального уравнения (7).

2.5.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$a(x)y'+b(x)y=f(x), \tag{8}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции, причем $a(x)$ не равна тождественно нулю.
Процесс отыскания общего решения уравнения (8). Называемый методом Бернулли, состоит в следующем. Ищем решение уравнения (8) в виде:

$$y=u(x)v(x), \tag{9}$$

где $u(x)$, $v(x)$ – суть неизвестные функции переменной x. Дифференцируя равенство (9), имеем:

$$y'=u'v+\underline{uv}'. \tag{10}$$

Подставляя формулы (9) и (10) в уравнение (8). Получаем:

$$[a(x)u'+b(x)u]v+a(x)uv'=f(x). \tag{11}$$

Выбираем функцию $u(x)\neq 0$ так, чтобы в уравнении (11) выражение в квадратных скобках обратилось в нуль. То есть берем в качестве $u(x)$ какое-либо ненулевое решение уравнения:

$$a(x)u'+b(x)u=0. \tag{12}$$

Уравнение (12) эквивалентно уравнению с разделяющимися переменными:

$$u'=-\frac{b(x)}{a(x)}u\ . \tag{13}$$

Решая его методом параграфа 2. найдем функцию $u(x)$. Причем в качестве $u(x)$ достаточно взять какое-либо частное ненулевое решение уравнения (13).
Пользуясь найденной функцией $u(x)$ из уравнения (11), в котором выражение в квадратной скобке равно нулю, находим вторую неизвестную функцию $v(x)$. Имеем:

$$a(x)u(x)v'=f(x). \tag{14}$$

Уравнение (14) является уравнением с разделяющимися переменными. Решая его методом параграфа 2, отыскиваем функцию $v(x)$.
Перемножая найденные функции $u(x)$ и $v(x)$, получаем в силу (9) общее решение y уравнения (8), которое будет зависеть от одной произвольной постоянной. Придавая этой постоянной конкретное значение, получим частное решение уравнения (8).
Указание. При решении каждого конкретного уравнения вида (8) следует повторить все приведенные выше рассуждения, вычисляя в явном виде все первообразные.

2.5.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y''+py'+qy=0, \tag{15}$$

где p, q – заданные вещественные числа.
Для отыскания общего решения уравнения (15), заменяя в нем y'', y', y соответственно на λ^2, λ, 1, составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2+p\lambda+q=0. \tag{16}$$

Пусть λ_1, λ_2 – корни характеристического уравнения (16).
1. Если λ_1, λ_2, – вещественны и различны, то общее решение уравнения (15) дается формулой:

$$y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}\ . \tag{17}$$

2. Если λ_1, λ_2 – вещественны и одинаковы, т.е. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, то общее решение уравнения (15) имеет вид:

$$y=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}\ . \tag{18}$$

3. Если λ_1, λ_2 – комплексные, то, как известно, они комплексно сопряжены, т.е. имеют вид:
$\lambda_1=\alpha+\beta i,\quad \lambda_2=\alpha-\beta i$, где α,β – вещественные числа, причем $\beta\neq 0$. В этом случае общее решение уравнения (15) определяется по формуле:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)\,. \qquad (19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Величины c_1, c_2, входящие в формулы (17), (18), (19), являются произвольными вещественными постоянными.

2.5.5. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида называется уравнение вида:

$$y''+py'+qy=f(x), \qquad (20)$$

где p, q – заданные вещественные числа, а правая часть $f(x)$ – заданная функция одного из следующих типов:

либо $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \ldots + a_mx^m$; (21)

либо $f(x)=\theta e^{\gamma x}$; (22)

либо $f(x) = \varepsilon \sin \mu x+ \delta \cos \mu x$; (23)

либо $f(x)=e^{\gamma x}(\varepsilon \sin \mu x+ \delta \cos \mu x)$. (24)

Входящие в формулы (21), (22), (23), (24) величины $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$, θ, γ, ε, μ – заданные вещественные числа; m – неотрицательное целое число.
Общее решение уравнения (20) имеет вид:

$$y=w+v, \qquad (25)$$

где v – частное решение уравнения (20), а w – общее решение уравнения:

$$w''+pw'+qw=0, \qquad (26)$$

которое получается из уравнения (20), если в правой части взять функцию $f(x)=0$, Уравнение вида (26) было подробно рассмотрено в параграфе 4. В частности, было показано, что его общее решение зависит от двух произвольных вещественных постоянных. Следовательно, и общее решение уравнения (20) в силу формулы (25) тоже зависит or двух произвольных постоянных. Отыскание общего решения уравнения (26) связано с характеристическим уравнением (16). Обозначим через λ_1 и λ_2 корни характеристического уравнения (16).
Приведем алгоритм отыскания частного решения уравнения (20).
Определяем вид функции v по табл. 1:

Т а б л и ц а 1

Вид функции $f(x)$	λ_1, λ_2	Вид функции $v(x)$
$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m$	$\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$	$b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m$
	$\lambda_1 \neq \lambda_2$, λ_1,=0 или λ_2=0	$x(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m)$
	$\lambda_1=\lambda_2=0$	$x^2(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m)$
$\theta e^{\gamma x}$	$\lambda_1 \neq \gamma$, $\lambda_2 \neq \gamma$	$A e^{\gamma x}$
	$\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1=\gamma$ или $\lambda_2=\gamma$	$Ax e^{\gamma x}$
	$\lambda_1=\lambda_2=\gamma$	$Ax^2 e^{\gamma x}$
$\varepsilon \sin \mu x+ \delta \cos \mu x$	$\lambda_1 \neq \mu i$, $\lambda_2 \neq \mu i$	$A\sin \mu x + B\cos \mu x$
	$\lambda_1=\mu i$, или $\lambda_2=\mu i$	$X(A\sin \mu x + B\cos \mu x)$
$e^{\gamma x}(\varepsilon \sin \mu x+ \delta \cos \mu x)$	$\lambda_1 \neq \gamma+\mu i$, $\lambda_2 \neq \gamma+\mu i$	$e^{\gamma x}(A\sin \mu x + B\cos \mu x)$
	$\lambda_1=\gamma+\mu i$, или $\lambda_2=\gamma+\mu i$	$xe^{\gamma x}(A\sin \mu x + B\cos \mu x)$

Величины b_0, b_1, b_2, ..., b_m, A, B – неизвестные постоянные, которые подлежат определению из условия того, что функция v является решением уравнения (20).
Для отыскания этих постоянных выполним следующие действия:
а) вычислим для выбранной по таблице функции v производные v' и v'';
б) подставив выражения для v, v', v'' в уравнение (20) вместо y, y', y'' соответственно, получим тождество

$$v''+pv'+qv=f(x), \qquad (27)$$

справедливое, в силу определения 2, для всех вещественных v;
в) задавая в тождестве (27) частные значения переменной x, например, $x = 0; 1; –1; \pi; –2\pi$;... (достаточно задать столько значений, сколько неизвестных постоянных входит в выражение для функции v), получим систему линейных уравнений относительно искомых неизвестных постоянных, причем эта система всегда имеет единственное решение;

г) решим полученную систему линейных уравнений, например, методом Гаусса.
ЗАМЕЧАНИЕ**.** Очень часто, вместо системы линейных уравнений при удачном выборе частных значений переменной *x,* сразу получаются явные выражения для искомых неизвестных постоянных. В этом случае, естественно, подпункт г) не нужен.
Найденные значения неизвестных постоянных подставляем в выражение для v и получаем искомое частное решение уравнения (20).
Найденное частное решение *v,* которое не будет, содержать никаких произвольных постоянных складываем с полученным в соответствии с алгоритмом параграфа 4 общим решением w уравнения (26), зависящим от двух произвольных постоянных; получим общее решение $y=w+v$ уравнения (20), зависящее от двух произвольных постоянных. Задавая этим постоянным конкретные значения, получим частное решение уравнения (20).
В заключение рассмотрим вопрос отыскания частного решения уравнения (20), удовлетворяющего начальным условиям $y=y_0$, $y'=y'_0$ при $x=x_0$. Для решения этой задачи нужно осуществить следующий процесс.
Найти общее решение y уравнения (20) по изложенному выше в этом параграфе алгоритму, оно будет зависеть от двух произвольных постоянных c_1 и c_2**.**
Дифференцируя полученное выражение для *y,* найти выражение для y'.
В выражения для общего решения y уравнения (20) и его производной y' подставить значения $x=x_0$, $y=y_0$, $y'=y'_0$.
Получим систему двух линейных уравнений относительно двух неизвестных c_1 и c_2.
Решив эту систему, найти c_1 и c_2.
Подставив найденные значения c_1 и c_2 в выражение для общего решения *y,* получить искомое частное решение уравнения (20), удовлетворяющее начальным условиям $y=y_0$, $y'=y'_0$, при $x=x_0$.

2.5.6. Примеры

ПРИМЕР 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy'-2y=2x^4 \tag{28}$$

и его частное решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y=2 \text{ при } x=1 \tag{29}$$

РЕШЕНИЕ. Уравнение (28) является уравнением вида (8) с $a(x)=x$, $b(x)=-2$, $f(x) = 2x^4$. Найдем общее решение уравнения (28), следуя алгоритму параграфа 3. То есть ищем общее решение уравнения (28) методом Бернулли.
1. Ищем решение уравнения (28) в виде:

$$y=u(x)v(x), \tag{30}$$

где $u(x)$, $v(x)$ – новые неизвестные функции.
Дифференцируя равенство (30), имеем:

$$y'=u'v+uv' \tag{31}$$

Подставляя выражения (30) и (31) в (28) уравнение получаем:

$$[xu'-2u]v+xuv'=2x^4 \tag{32}$$

2. Выбираем функцию $u(v) \neq 0$ так, чтобы в уравнении (32) обратилось в нуль выражение в квадратных скобках. То есть берем в качестве $u(x)$ какое-либо ненулевое частное решение уравнения: $xu'-2u=0$, которое эквивалентно уравнению с разделяющимися переменными: $u' = \dfrac{2}{x}u$. Решаем его методом параграфа 2.5.2. При этом учитываем, что требуется найти не общее решение уравнения, а какое-либо его ненулевое частное решение. Поэтому возникающую при интегрировании постоянную полагаем равной нулю. Итак, имеем:

$$\frac{du}{u} = 2\frac{dx}{x}; \quad \int\frac{du}{u} = 2\int\frac{dx}{x}; \quad \ln|u| = 2\ln|x|; \quad u = x^2. \tag{33}$$

3. Подставляем найденную функцию $u(x)$ в уравнение (32). После приведения подобных получаем уравнение для, отыскания неизвестной функции $v(x)$:

$$v'=2x,$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными.
4. Решаем полученное в предыдущем пункте уравнение методом параграфа 2. Имеем:

$$\frac{dv}{dx} = 2x \text{, тогда } dv = 2xdx.$$

Отсюда

$$v(x) = x^2 + c. \tag{34}$$

5. Подставляя функции (33) и (34) в формулу (30) получаем общее решение уравнения (28):

$$y = (x^2 + c)x^2. \tag{35}$$

6. Найдем теперь частное решение уравнения (28), удовлетворяющее начальному условию (29), следуя алгоритму параграфа 3, имеем:
1) общее решение уравнения (28) дается формулой (35);
2) полагая в формуле (35) $x=1$ и $y = 2$, получаем $2=(1^2+c)1^2$, отсюда находим значение $c=1$;
3) найденное значение c подставляем в формулу (35) и получаем искомое частное решение уравнения (28), удовлетворяющее начальному условию (29):

$$y = (x^2 + 1)x^2. \tag{36}$$

Итак, ответ дается формулами (35) и (36).
ПРИМЕР 2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''-2y'-3y=x^2-4 \tag{37}$$

и частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y=1 \text{ и } y'=-1 \text{ при } x=0. \tag{38}$$

РЕШЕНИЕ. Уравнение (37) является уравнением вида (20) с $p=-2$, $q=-3$ и правой частью $f(x)=x^2-4$ вида (21) с $a_0=-4$, $a_1=0$, $a_2=1$; $m=2$.
Найдем общее, решение уравнения (37), следуя алгоритму параграфа 5. Общее решение уравнения (37) имеет вид:

$$y = w + v, \tag{39}$$

где w – общее решение уравнения:

$$w'' - 2w' - 3w = 0; \tag{40}$$

и v – частное решение уравнения (37).
Уравнение (40) является уравнением вида (15). Ищем его решение по алгоритму параграфа 4 и составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Корнями этого характеристического уравнения являются $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=3$.
Так как λ_1 и λ_2 и вещественны и различны, то общее решение уравнения (40) имеет вид:

$$w = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}. \tag{41}$$

Следуя параграфу 5, найдем частное решение v уравнения (37).
1. По табл. 1 определяем вид функции v:

$$v = b_0 + b_1x + b_2x^2. \tag{42}$$

2. Величины b_0, b_1, b_2 – неизвестные постоянные, которые находятся из условия, что (42) является решением уравнения (37). Найдем эти постоянные.
а) Дифференцируя (42), вычислим v' и v'':

$$v' = b_1 + 2b_2x, \qquad v'' = 2b_2. \tag{43}$$

б) Подставим выражения (42) и (43) в уравнение (37) В силу определения 2 получим тождество:

$$2b_2 - 2(b_1 + 2b_2x) - 3(b_0 + b_1x + b_2x^2) = x^2 - 4, \tag{44}$$

справедливое для всех вещественных x.
в) Задавая в тождестве (44) три частных значения переменной x (столько, чему равно количество неизвестных постоянных): x=0; –1; 1, получим систему трех линейных уравнений относительно трех неизвестных b_0, b_1, b_2.
Имеем:
при $x = 0$ получаем $2b_2-2b_1-3b_0=-4$; (45)
при $x = -1$ получаем $3b_2+b_1-3b_0=-3$; (46)
при $x = 1$ получаем $-5b_2-5b_1-3b_0=-3$. (47)
Уравнения (45), (46), (47) образуют искомую систему линейных уравнений.
г) Решая эту систему методом Гаусса, получаем:

$$b_0 = \frac{22}{27}; \quad b_1 = \frac{4}{9}; \quad b_2 = -\frac{1}{3}. \tag{48}$$

Подставляя значения (48) в выражение (42), получаем искомое частное решение:

$$v = \frac{22}{27} + \frac{4}{9}x - \frac{1}{3}x^2. \tag{49}$$

Из формул (39), (41), (49) находим общее решение уравнения (37):

$$y = \frac{22}{27} + \frac{4}{9}x - \frac{1}{3}x^2 + c_1e^{-x} + c_2e^{3x}. \tag{50}$$

Найдем теперь частное решение уравнения (37), удовлетворяющее начальным условиям (38), следуя алгоритму параграфа 5.
1. Общее решение уравнения (37) дается формулой (50).
2. Дифференцируя функцию (50), находим выражение для производной:

$$y' = \frac{4}{9} - \frac{2}{3}x - c_1e^{-x} + 3c_2e^{3x}. \tag{51}$$

3. В выражения (50) и (51) подставим x=0, y=1, y'=–1. Получим систему двух линейных уравнений относительно двух неизвестных c_1 и c_2:

$$1=\frac{22}{27}+c_1+c_2, \qquad -1=\frac{4}{9}-c_1+3c_2.$$

4. Решая эту систему, находим:

$$c_1=\frac{1}{2}, \qquad c_2=-\frac{17}{54}. \tag{52}$$

5. Подставляя значения (52) в формулу (50), получаем искомое частное решение уравнения (37), удовлетворяющее начальным условиям

$$y=\frac{22}{27}+\frac{4}{9}x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{17}{54}e^{3x}. \tag{53}$$

Итак, ответ дается формулами (50) и (53).

ПРИМЕР 3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''+2y'+y=3e^{-x}. \tag{54}$$

и частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y=2,\ y'=0 \text{ при } x=0. \tag{55}$$

РЕШЕНИЕ. Уравнение (54) является уравнением вида (20) с $p=2$, $q=1$ и правой частью $f(\mathrm{x})=3e^{-x}$ вида (22) с $\theta=3$, $\gamma=-1$.

Найдем общее. решение уравнения (54), следуя алгоритму параграфа 5. Общее решение уравнения (54) имеет вид:

$$y=w+v. \tag{56}$$

где w – общее решение уравнения;

$$w''+2w'+w=0; \tag{57}$$

а v – частное решение уравнения (54).

Уравнение (57) является уравнением вида (15). Ищем решение его по алгоритму параграфа 4. Составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2+2\lambda+1=0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_1=\lambda_2=-1$. Так как λ_1 и λ_2 – вещественны и одинаковы, то общее решение уравнения (57) имеет вид:

$$w=(c_1+c_2x)e^{-x}. \tag{58}$$

Следуя параграфу 5, найдем частное решение v уравнения (54).

1. По табл.1 определяем вид функции v:

$$v=Ax^2e^{-x}. \tag{59}$$

2. Величина A – неизвестная постоянная, которая находится из условия, что выражение (59) является решением уравнения (51). Найдем эту постоянную.

а) Дифференцируя формулу (59), вычислим v' и v'':

$$v'=(2Ax-Ax^2)e^{-x}; \quad v''=(2A-4Ax+Ax^2)e^{-x}. \tag{60}$$

б) Подставим выражения (59) и (60) в уравнение (54). В силу определения 2 получим тождество:

$$[2A-4Ax+Ax^2+2(2Ax-Ax^2)+Ax^2]\ e^{-x}=3e^{-x},$$

которое, после приведения подобных и деления обеих частей на e^{-x}, приводит к равенству $2A=3$, не содержащему переменной x. Поэтому необходимость в подпунктах в и г отпадает, и сразу получаем:

$$A=\frac{3}{2}. \tag{61}$$

Подставляя значение (61) в соотношение (59), имеем искомое частное решение:

$$v=\frac{3}{2}x^2e^{-x}. \tag{62}$$

Из формул (56), (58), (62) находим общее решение уравнения (54);

$$y=\frac{3}{2}x^2e^{-x}+(c_1+c_2x)e^{-x}, \qquad (63)$$

Найдем теперь частное решение уравнения (54), удовлетворяющее начальным условиям (55).
1. Общее решение уравнения (54) дается формулой (63).
2. Дифференцируя функцию (63), находим выражение для производной:

$$y'=(3x-\frac{3}{2}x^2+c_2-c_1-c_2x)e^{-x}. \qquad (64)$$

3. В выражения (63) и (64) подставим $x=0$, $y=2$, $y'=0$. Получим систему двух линейных уравнений относительно двух неизвестных c_1 и c_2: $2=c_1$, $0=c_2-c_1$.
4. Решая эту систему, имеем:

$$c_1=2;\ c_2=2. \qquad (65)$$

5. Подставляя значения (65) в формулу (63), получаем искомое частное решение уравнения (54), удовлетворяюшее начальным условиям (55):

$$y=\frac{3}{2}x^2e^{-x}+2(x+1)e^{-x}. \qquad (66)$$

Итак, ответ дается формулами (63) и (66).
ПРИМЕР 4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''-4y'+5y=8\sin x \qquad (67)$$

и частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y=0;\ y'=1 \text{ при } x=0. \qquad (68)$$

РЕШЕНИЕ. Уравнение (67) является уравнением вида (20) с $p=-4$, $q=5$ и правой частью $f(x)=8\sin x$ вида (23) $\varepsilon=8$, $\delta=0$, $\mu=1$.
Найдем общее решение уравнения (67), следуя алгоритму параграфа 5, Общее решение, уравнения (67) имеет вид:

$$y=w+v, \qquad (69)$$

где w – общее решение уравнения:

$$w''-4w'+5w=0, \qquad (70)$$

а v – частное решение уравнения (67).
Уравнение (70) является уравнением вида (15). Ищем его общее решение по алгоритму параграфа 4.
Составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-4\lambda+5=0\,.$$

Корнями этого характеристического уравнения являются $\lambda_1=2+i$, $\lambda_2=2-i$.Так как λ_1 и λ_2 – комплексные, то общее решение уравнения (70) имеет вид:

$$w=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x), \qquad (71)$$

где c_1, c_2 – произвольные вещественные постоянные.
Следуя параграфу 5, найдем частное решение v уравнения (67).
1. По табл. 1 определяем вид функции v:

$$v=A\sin x+B\cos x. \qquad (72)$$

2. Величины A, B – неизвестные постоянные, которые находятся из условия, что (72) является решением уравнения (67). Найдем эти постоянные:
а) Дифференцируя функцию (72), вычислим v' и v'':

$$v'=A\cos x-B\sin x;\quad v''=-A\sin x-B\cos x. \qquad (73)$$

б) Подставим выражения (72) и (73) в уравнение (67). В силу определения 2 получим тождество:

$$-A\sin x-B\cos x-4(A\cos x-B\sin x)+5(A\sin x+B\cos x)=8\sin x, \qquad (74)$$

справедливое для всех вещественных x.

в) Задавая в тождестве (74) два частных значения переменной x (столько частных значений, чему равно количество неизвестных постоянных) $x = 0$; $\frac{\pi}{2}$, получим систему двух линейных уравнений относительно двух неизвестных A, B.

Имеем:

при $x=0$ получаем $4B–4A=0$; (75)

при $x=\frac{\pi}{2}$ получаем $4B+4A=8$. (76)

Уравнения (75), (76) образуют искомую систему линейных уравнений.

г) Решая эту систему, получаем:

$$A=1;\ B=1. \tag{77}$$

Подставляя значения (77) в формулу (72), получаем искомое частное решение v:

$$v=\sin x+\cos x. \tag{78}$$

Из формул (69), (71), (78) находим общее решение уравнения (67):

$$y = \sin x + \cos x + e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x). \tag{79}$$

Найдем теперь частное решение уравнения (67), удовлетворяющее начальным условиям (68), следуя алгоритму параграфа 5.

1. Общее решение уравнения (67) дается формулой (79).
2. Дифференцируя функцию (79), находим выражение для производной y':

$$y' = \cos x - \sin x + e^{2x}\left[(2c_1 + c_2)\cos x + (2c_2 - c_1)\sin x\right]. \tag{80}$$

3. В выражения (79) и (80) подставим $x=0$, $y=0$, $y'=1$. Получим систему двух линейных уравнений относительно двух неизвестных c_1 и c_2: $0=1+c_1$; $1=1+2c_1+c_2$.
4. Решая эту систему, находим:

$$c_1 = -1; \quad c_2 = 2. \tag{81}$$

5. Подставляя значения (81) в формулу (79), получим искомое частное решение уравнения (67), удовлетворяюшее начальным условиям (68):

$$y = \sin x + \cos x + e^{2x}(2\sin x - \cos x). \tag{82}$$

Итак, ответ дается формулами (79) и (82).

Контрольные вопросы

1. Что такое дифференциальное уравнение?
2. Что такое порядок дифференциального уравнения?
3. Что называется решением дифференциального уравнения?
4. Что такое «задача Коши» для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной? Что такое начальные данные, начальные условия?
5. В чем состоит геометрический смысл: 1) дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной?; 2) решение этого уравнения; 3) решение задачи Коши для этого уравнения? Что такое интегральная кривая?
6. Что такое частное решение дифференциального уравнения? Что такое общее решение дифференциального уравнения?
7. Привести алгоритм решения задачи Коши для дифференциального уравнения.
8. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными?
9. Привести алгоритм отыскания общего решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
10. Что такое линейное дифференциальное уравнение первого порядка?

11. В чем заключается метод Бернули отыскания общего решения линейного дифференциального первого порядка?
12. Что такое линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами? Какое уравнение называется однородным, а какое неоднородным?
13. Что такое характеристическое уравнение для линейного, однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
14. Как строится общее решение линейного, однородного дифференциального уравнения второго порядка по известным корням характеристического уравнения?
15. Что такое линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида? Как связано общее решение этого уравнения с общим решением соответствующего ему линейного, однородного дифференциального уравнения?
16. Как по правой части специального вида для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами выдирается вид его частного решения? (Таблица 1) Как находятся неопределенные коэффициенты, входящие для в выражение для этого частного решения?
17. Как ставится задача Коши для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами с нулевой правой частью и правой частью специального вида? Как решается эта задача Коши?

Тестовые задания

1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $y' = -\dfrac{y}{x+1}$

   Ответ: $y = -\dfrac{c}{x+1}$ (c – произвольная постоянная).
2. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=5$. Ответ: $y = \dfrac{5}{x+1}$.
3. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $xy'+2y=2x^3$.

   Ответ: $y = 0{,}4x^3 + \dfrac{c}{x^2}$ (c – произвольная постоянная).
4. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$. Ответ: $y = 0{,}4x^3 + \dfrac{1{,}6}{x^2}$.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-7y'+12y=0$.
   Ответ: $y = c_1e^{3x} + c_2e^{4x}$ (c_1, c_2 – произвольные вещественные постоянные).
6. Найти такое решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=1$, $y'(0)=2$.
   Ответ: $y=2e^{3x}-1e^{4x}$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' -2y' +5y=0$.
   Ответ: $y=e^x(c_1\sin 2x+c_1\cos 2x)$ (c_1, c_2 – произвольные вещественные постоянные).
8. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=2$, $y'(0)=6$.
   Ответ: $y=e^x(3\sin 2x+2\cos 2x)$.
9. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+25y=0$.
   Ответ: $y=c_1\sin 5x+c_2\cos 5x$.
10. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=4$, $y'(0)=5$.
   Ответ: $y=\sin 5x+4\cos 5x$.
11. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+25y = 0$.
   Ответ: $y=c_1\sin 5x+c_2\cos 5x$.
12. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=4$, $y'(0)=5$.
   Ответ: $y=\sin 5x+4\cos 5x$.
13. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+y' -2y=e^x$.
   Ответ: $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+xe^x$ (c_1, c_2 – произвольные вещественные постоянные).
14. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=4$, $y'(0)=-1$.
   Ответ: $y=2e^x+2e^{-2x}+xe^x$.

Основная литература по теме

1. *Шипачев В.С.* Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1990. – гл.15. – п.п. 1–4.
2. *Шипачев В.С.* Задачник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000. – гл. 14. – п.п. 1–3.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИХ РЕШЕНИЮ

ВАРИАНТ № 1

Задание 1

Дан треугольник ABC, где $A(5;4)$, $B(2;0)$, $C(8;3)$. Найти:

1. длину стороны AB;
2. внутренний угол A с точностью до градуса;
3. уравнение и длину высоты, опущенной из вершины C;
4. точку пересечения высот;
5. уравнение медианы, проведенной через вершину C;
6. систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC;
7. сделать чертеж.

Задание 2

Даны векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \overline{b}$. Доказать, что векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}$ образуют базис четырехмерного пространства, и найти координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе.

$$\overline{a}_1\,(-2, 1, 1, 0)\,,\ \overline{a}_2\,(1, 2, 2, -1)\,,\ \overline{a}_3\,(-1, -1, 3, -1)\,,\ \overline{a}_4\,(0, 1, 0, -2)\,,\ \overline{b}\ (-4, -4, -3, 4).$$

Задание 3

Найти производные функций:

$$а)\, y=\left(5-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x^3}+4x\cdot\sqrt[5]{x^2}\right)^2 \qquad б)\, y=\ln\frac{\cos 2x}{\sin 3x}$$

$$в)\, y=arc\cos\sqrt{1-2x} \qquad г)\, y=2^{-\frac{1}{(x-2)^2}}-5x^3\cdot\sin(3x-1)$$

Задание 4

Исследовать функцию и построить её график.

$$y=\frac{20x^2}{(x-1)^3}.$$

Задание 5

Найти неопределённые интегралы. Результаты проверить дифференцированием:

а) $\int tg^2 5xdx$; б) $\int\frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$; в) $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$ г) $\int\frac{x^3-6}{2x^2-3x-2}dx$

Задание 6

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$f_1(x)=2x^2-2x-1 \quad \text{и} \quad f_2(x)=x^2-x-1.$$

ВАРИАНТ № 2

Задание 1

Дан треугольник ABC, где $A(-3;2)$, $B(3;-1)$, $C(0;3)$. Найти:

1. длину стороны AB;
2. внутренний угол A с точностью до градуса;
3. уравнение и длину высоты, опущенной из вершины C;
4. точку пересечения высот;
5. уравнение медианы, проведенной через вершину C;
6. систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC;
7. сделать чертеж.

Задание 2

Даны векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \overline{b}$. Доказать, что векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}$ образуют базис четырехмерного пространства, и найти координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе.

$\overline{a}_1(0, 2, -1, 3)$, $\overline{a}_2(2, -1, 2, -1)$, $\overline{a}_3(2, 1, 1, 0)$, $\overline{a}_4(-1, 0, 3, -1)$, $\overline{b}$ (8, –1, –1, 0).

Задание 3

Найти производные функций:

$$а)\, y=\left(\frac{4x^5\cdot\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{7}{x^2}+5x^3\cdot\sqrt{x}\right)^3 \qquad б)\; y=\ln\frac{\sin 5x}{\cos 3x}$$

Задание 4

Исследовать функцию и построить ее график.

$в)\ y = arc\sin\sqrt{1-5x}$ $г)\ y = -6^{\frac{1}{x+4}} + \frac{1}{2}x^2 \cdot \cos(2x-1)$

$$y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}.$$

Задание 5

Найти неопределённые интегралы. Результаты проверить дифференцированием:

$$а)\int\sqrt{1-\sin 3x}\cos 3x dx;\quad б)\int\frac{x^2dx}{\left(8x^3+27\right)^{3/2}};\quad в)\int\frac{x\cos x}{\sin^3 x};\quad г)\int\frac{2x^3+1}{3x^2-2x-1}dx$$

Задание 6

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$f_1(x) = -x+7 \text{ и } f_2(x) = x^2-6x+7.$$

ВАРИАНТ № 3

Задание 1

Дан треугольник ABC, где $A(2;0)$, $B(-1;-4)$, $C(-4;-3)$. Найти:

1. длину стороны AB;
2. внутренний угол A с точностью до градуса;
3. уравнение и длину высоты, опущенной из вершины C;
4. точку пересечения высот;
5. уравнение медианы, проведенной через вершину C;
6. систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC;
7. сделать чертеж.

Задание 2

Даны векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \overline{b}$. Доказать, что векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}$ образуют базис четырехмерного пространства, и найти координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе.

$$\overline{a}_1\ (0, 1, -2, 3),\ \overline{a}_2\,(1, -2, 0, -1),\ \overline{a}_3\ (-1, 3, -2, 2),\ \overline{a}_4\ (0, 1, 3, 1),\ \overline{b}\ (2, -2, -4, 6).$$

Задание 3

Найти производные функций:

$$а)\, y = \left(3x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2} + \frac{3x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{5}{x^2}\right)^2 \qquad б)\; y = \ln\frac{tg3x}{\cos 2x}$$

$$в)\; y = arc\,tg\sqrt{2x-1} \qquad г)\; y = 2^{7\cdot\frac{1}{x-4}} + 5x^3 \cdot tg\frac{2x}{3}$$

Задание 4

Исследовать функцию и построить ее график.

$$y = \frac{x^3}{x-1}.$$

Задание 5

Найти неопределённые интегралы. Результаты проверить дифференцированием:

$$а)\int\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx;\;\; б)\int xe^{-2x^2}dx;\;\; в)\int x^2e^{-3x}dx;\;\; г)\int\frac{5x^3-8}{x^3-4x^2+4x}dx$$

Задание 6

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$f_1(x) = x^2 - 3x + 1$ и $f_2(x) = -x^2 - 3x + 1$.

ВАРИАНТ № 4

Задание 1

Дан треугольник ABC, где $A(6;-3)$, $B(9;-2)$, $C(3;1)$. Найти:

1. длину стороны AB;
2. внутренний угол A с точностью до градуса;
3. уравнение и длину высоты, опущенной из вершины C;
4. точку пересечения высот;
5. уравнение медианы, проведенной через вершину C;
6. систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC;
7. сделать чертеж.

Задание 2

Даны векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{b}$. Доказать, что векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ образуют базис четырехмерного пространства, и найти координаты вектора $\bar{b}$ в этом базисе.

$\bar{a}_1\,(-1, 3, 2, 0)$, $\bar{a}_2\,(1, -2, 0, -1)$, $\bar{a}_3\,(0, 1, 1, -1)$, $\bar{a}_4\,(1, -1, 1, 2)$, $\bar{b}\,$ (1, 0, 3, 5).

Задание 3

Найти производные функций:

а) $y = \left(\frac{4}{x^3} - \frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} - 4x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}\right)^3$

б) $y = \ln\frac{\sin 2x}{ctg 3x}$

в) $y = arc\, ctg\sqrt{3x^2 - 1}$

г) $y = 16^{\frac{1}{x-2}} + \frac{1}{5}x^5 \cdot ctg 2x$

Задание 4

Исследовать функцию и построить её график.

$$y = \frac{1 + x^2}{1 + (x - 2)^2}.$$

Задание 5

Найти неопределённые интегралы. Результаты проверить дифференцированием:

$$а) \int \frac{2x + \cos x}{x^2 + \sin x}dx; \quad б) \int \frac{e^x}{e^x + 2}dx; \quad в) \int x^2 \sin 3x dx; \quad г) \int \frac{x^3 + 2}{x^3 - 2x^2 + x}dx$$

Задание 6

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$f_1(x) = -x^2 - 2x + 1 \text{ и } f_2(x) = -2x^2 - 2x + 2 .$$

ВАРИАНТ № 5

Задание 1

Дан треугольник ABC, где $A(1; 5)$, $B(-2; 1)$, $C(4; 4)$. Найти:

1. длину стороны AB;
2. внутренний угол A с точностью до градуса;
3. уравнение и длину высоты, опущенной из вершины C;
4. точку пересечения высот;
5. уравнение медианы, проведенной через вершину C;
6. систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC;
7. сделать чертеж.

Задание 2

Даны векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \overline{b}$. Доказать, что векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}$ образуют базис четырехмерного пространства, и найти координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе.

$$\overline{a}_1\,(2, -1, 0, 3)\,,\ \overline{a}_2\,(-1, 1, 2, 1)\,,\ \overline{a}_3\,(1, 0, 2, 0)\,,\ \overline{a}_4\,(0, 1, -1, 1)\,,\ \overline{b}\ (-1, 2, -4, 6).$$

Задание 3

Найти производные функций:

$a)\, y = \left(7x^3 \cdot \sqrt[4]{x^3} + \dfrac{3x \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^3}} - 5x\right)^2$ $б)\ y = \ln\dfrac{\sin 5x}{\cos 3x}$

$в)\ y = arc\cos\sqrt{1-3x^2}$ $г)\ y = e^{\frac{1}{x-1}} + \dfrac{x^3}{3}\cdot\sin(2-3x)$

Задание 4

Исследовать функцию и построить её график.

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Задание 5

Найти неопределённые интегралы. Результаты проверить дифференцированием:

$a)\int\sqrt[6]{5-7\cos 4x}\,\sin 4x dx;$ $б)\int\dfrac{dx}{e^x+e^{-x}};$ $в)\int x^5 e^{x^3}dx;$ $г)\int\dfrac{5x^3-14}{x^3-x^2-4x+4}dx$

Задание 6

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$f_1(x) = -x+1 \ \text{ и } \ f_2(x) = -x^2+6x-5\,.$$

ВАРИАНТ № 6

Задание 1

Дан треугольник ABC, где $A(2;\,0)$, $B(-1;\,4)$, $C(-4;\,3)$. Найти:

1. длину стороны AB;
2. внутренний угол A с точностью до градуса;
3. уравнение и длину высоты, опущенной из вершины C;
4. точку пересечения высот;

5. уравнение медианы, проведенной через вершину С;
6. систему линейных неравенств, определяющих треугольник АВС;
7. сделать чертеж.

Задание 2

Даны векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \overline{b}$. Доказать, что векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}$ образуют базис четырехмерного пространства, и найти координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе.

$$\overline{a}_1\,(0, -1, 0, 2),\ \overline{a}_2\,(1, -2, 2, 1),\ \overline{a}_3\,(-1, 1, 3, 1),\ \overline{a}_4\,(-2, -1, 1, 0),\ \overline{b}\,(-5, -1, 0, 1).$$

Задание 3

Найти производные функций:

$$а)\ y = \left(-\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^3} + \frac{3x^2\cdot\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{5}{x^2}\right)^3 \qquad б)\ y = \ln\frac{\cos 4x}{\sin 2x}$$

$$в)\ y = arc\sin\sqrt{1-2x^4} \qquad г)\ y = 2^{-2\cdot\frac{1}{1-x}} - \frac{x^2}{3}\cdot\cos(1-5x)$$

Задание 4

Исследовать функцию и построить её график.

$$y = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}.$$

Задание 5

Найти неопределённые интегралы. Результаты проверить дифференцированием:

$$а)\int e^{\sin 2x}\cos 2x dx;\quad б)\int\frac{\ln^2 x+3}{x}dx;\quad в)\int\frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}dx;\quad г)\int\frac{x^3+3}{4x^3-x}dx$$

Задание 6

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$f_1(x) = 2x^2 - 3x - 1 \text{ и } f_2(x) = x^2 - 2x - 1.$$

ВАРИАНТ № 7

Задание 1

Дан треугольник АВС, где $A(6; 3)$, $B(9; 2)$, $C(3; -1)$. Найти:
1. длину стороны АВ;
2. внутренний угол А с точностью до градуса;

3. уравнение и длину высоты, опущенной из вершины С;
4. точку пересечения высот;
5. уравнение медианы, проведенной через вершину С;
6. систему линейных неравенств, определяющих треугольник АВС;
7. сделать чертеж.

Задание 2

Даны векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \overline{b}$. Доказать, что векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}$ образуют базис четырехмерного пространства, и найти координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе.

$$\overline{a}_1\ (2, 1, -1, 0),\ \overline{a}_2\ (2, -1, -2, 1),\ \overline{a}_3\ (0, 2, 1, -3),\ \overline{a}_4\ (-1, 0, -3, 1),\ \overline{b}\ (0, 2, -1, -5).$$

Задание 3

Найти производные функций:

Задание 4

$$а)\, y=\left(\frac{2x^3\cdot\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}+5x^2\cdot\sqrt[5]{x^3}-3x\right)^2 \qquad б)\ \ y=\ln\frac{\sin 3x}{tg2x}$$

$$в)\ \ y=arc\,tg\sqrt{3x^2-1} \qquad г)\ \ y=-e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}+\frac{x^3}{2}\cdot tg2x$$

Исследовать функцию и построить её график.

$$\text{y}=\frac{(\text{x - 5})^3}{(\text{x - 7})^2}.$$

Задание 5

Найти неопределённые интегралы. Результаты проверить дифференцированием:

$$а)\int\frac{5x^4dx}{\sqrt{3+x^5}};\ \ б)\int\frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos^5 3x}}dx;\ \ в)\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2dx;\ \ г)\int\frac{x^3+4}{x^2+x-12}dx$$

Задание 6

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$f_1(x)=x^2-x-1 \text{ и } f_2(x)=-x^2-3x-1.$$

ВАРИАНТ № 8

Задание 1

Дан треугольник ABC, где $A(5;-4)$, $B(2;0)$, $C(8;-3)$. Найти:

1. длину стороны AB;
2. внутренний угол A с точностью до градуса;
3. уравнение и длину высоты, опущенной из вершины C;
4. точку пересечения высот;
5. уравнение медианы, проведенной через вершину C;
6. систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC;
7. сделать чертеж.

Задание 2

Даны векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{b}$. Доказать, что векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ образуют базис четырехмерного пространства, и найти координаты вектора $\bar{b}$ в этом базисе.

$\bar{a}_1\,(-1, 2, 0, -1)$, $\bar{a}_2\,(0, -1, -2, 3)$, $\bar{a}_3\,(1, -3, -2, 2)$, $\bar{a}_4\,(0, -1, 3, 1)$, $\bar{b}\,(-1, 0, 1, 5)$.

Задание 3

Найти производные функций:

$$а)\ y=\left(\frac{4}{x^3}-\frac{x\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^2}}+4x^3\cdot\sqrt[3]{x^2}\right)^3 \qquad б)\ y=\ln\frac{ctg5x}{\cos 2x}$$

$$в)\ y=arc\,ctg\sqrt{5x^3-1} \qquad г)\ y=-2^{3\cdot\frac{1}{x-2}}+x^3\cdot ctg\frac{x}{3}$$

Задание 4

Исследовать функцию и построить её график.

$$y=\frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}.$$

Задание 5

Найти неопределённые интегралы. Результаты проверить дифференцированием:

$$а)\int 3x^2e^{-x^3}dx;\quad б)\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx;\quad в)\int xe^{-x}dx;\quad г)\int\frac{x^3+1}{x^2+2x-15}dx$$

Задание 6

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$f_1(x)=3x+4 \text{ и } f_2(x)=2x^2+3x+2.$$

ВАРИАНТ № 9

Задание 1

Дан треугольник ABC, $A(-3;-2)$, $B(3;1)$, $C(0;-3)$. Найти:

1. длину стороны AB;
2. внутренний угол A с точностью до градуса;
3. уравнение и длину высоты, опущенной из вершины C;
4. точку пересечения высот;
5. уравнение медианы, проведенной через вершину C;
6. систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC;
7. сделать чертеж.

Задание 2

Даны векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \overline{b}$. Доказать, что векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}$ образуют базис четырехмерного пространства, и найти координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе.

$\overline{a}_1\,(1, 3, -2, 0)$, $\overline{a}_2\,(-1, -1, -1, 2)$, $\overline{a}_3\,(0, 1, -1, -1)$, $\overline{a}_4\,(-1, -2, 0, -1)$, $\overline{b}\,(-2, -2, -3, 4)$.

Задание 3

Найти производные функций:

а) $y=\left(2x^5\cdot\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{3x^2\cdot\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{6}{x^3}\right)^2$ б) $y=\ln\dfrac{tg2x}{ctg3x}$

в) $y=arc\sin\sqrt{1-4x^6}$ г) $y=e^{-\frac{1}{1-x}}+x^3\cdot\cos5x$

Задание 4

Исследовать функцию и построить её график.

$$y = x+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}.$$

Задание 5

Найти неопределённые интегралы. Результаты проверить дифференцированием:

а) $\int\sqrt[4]{3-2\sin3x}\cos3xdx$; б) $\int\dfrac{xdx}{x^4+0{,}25}$; в) $\int x\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$; г) $\int\dfrac{2x^3+3}{x^3+x^2-2x}dx$

Задание 6

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$f_1(x)=-x^2+x-1 \text{ и } f_2(x)=-2x^2+x+3\,.$$

ВАРИАНТ № 10

Задание 1

Дан треугольник ABC, где $A(1;-5)$, $B(4;-4)$, $C(-2;-1)$. Найти:

1. длину стороны AB;
2. внутренний угол A с точностью до градуса;
3. уравнение и длину высоты, опущенной из вершины C;
4. точку пересечения высот;
5. уравнение медианы, проведенной через вершину C;
6. систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC;
7. сделать чертеж.

Задание 2

Даны векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \overline{b}$. Доказать, что векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}$ образуют базис четырехмерного пространства, и найти координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе.

$\overline{a}_1\,(2, -1, 0, -3)$, $\overline{a}_2\,(-1, 1, -2, -1)$, $\overline{a}_3\,(0, 1, 1, -1)$, $\overline{a}_4\,(1, 0, -2, 0)$, $\overline{b}\,(0, -1, 4, -7)$.

Задание 3

Найти производные функций:

$$а)\ y=\left(\frac{3}{x^4}-\frac{2x^2\cdot\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}+3x^5\cdot\sqrt[4]{x^3}\right)^3 \qquad б)\ y=\ln\frac{ctg5x}{tg3x}$$

$$в)\ y=arc\cos\sqrt{1-4x^4} \qquad г)\ y=-9^{\frac{1}{x-1}}-3x^2\cdot\sin\frac{2x}{3}$$

Задание 4

Исследовать функцию и построить её график.

$$y=\frac{x^4}{x^3+2}.$$

Задание 5

Найти неопределённые интегралы. Результаты проверить дифференцированием:

$$а)\int\frac{e^{tg2x}}{\cos^2 2x}dx;\quad б)\int\frac{dx}{1+e^x};\quad в)\int\frac{\ln^3 x}{x^2}dx;\quad г)\int\frac{x^3-5}{x^3-x^2-6x}dx$$

Задание 6

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$f_1(x)=2x^2-3x+2 \text{ и } f_2(x)=x^2-x+2\,.$$

Методические указания к решению задания 1

В Теме 1.2. «Элементы аналитической геометрии» изучить пункты 1, 3, 4, 5, 8, разобрать примеры и контрольные задания. Особое внимание обратить на ПРИМЕР 2 из пункта 5 и ПРИМЕР из пункта 8, которые вместе являются аналогом задания 1 контрольной работы.

Методические указания к решению задания 2

1. Повторите Тему 1.3. «Линейная алгебра».
2. Вспомните определения базиса пространства R^n и его свойства, координат вектора в данном базисе.
3. Разберите ЗАДАЧУ, рассмотренную в этом пункте 1.3.4.
4. Решите задание №2 из своей контрольной работы.

Методические указания к решению задания 3

Повторите Тему 2.2.. «Дифференциальное исчисление», пункт 1. Разберите ПРИМЕРЫ. Выучите Таблицу производных и правила дифференцирования. Примените эти правила к решению задач из своего задания.

Методические указания к решению задания 4

Разберите Тему 2.2. «Дифференциальное исчисление», пункты 4 – 7 . Подробно разберите ПРИМЕР 4 из пункта 7. Проведите исследование функции из своего задания.

Методические указания к решению задания 5

Прочтите Тему 2.3. «Интегральное исчисление» пункты 1 – 7. Задачи 5а и 5б решаются с применением табличных интегралов (стр. 162, 163) и метода замены переменной (см. стр. 166-170 и ПРИМЕРЫ 16 – 20 на стр. 174-175). Задача 5в решается методом интегрирования по частям (см. стр. 164-166 и ПРИМЕРЫ 21 – 24 на стр. 175-176). Задача 5г решается методом интегрирования рациональных алгебраических функций (см. стр. 170 – 173).

Методические указания к решению задания 6

В Теме 2.3. «Интегральное исчисление» рассмотрите пункт 14 «Применение определенных интегралов к вычислению площадей плоских фигур». Разберите находящиеся там ПРИМЕРЫ.

СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

Абсолютная сходимость – числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ называется: абсолютно сходящимся, если сходится числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n|$.

Асимптоты функции – прямая называется асимптотой кривой, если расстояние d от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю.

Базис пространства R^n – система векторов этого пространства, обладающая двумя свойствами: 1) эта система линейно независима, 2) любой вектор пространства R^n может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы.

Базис системы векторов – *базисом системы* векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ называется подсистема этой системы векторов, обладающая двумя свойствами: эта подсистема линейно независима, любой вектор системы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой подсистемы.

Вектор – величина, характеризуемая не только числовым значением; но и направлением; прямолинейный отрезок, которому придано направление, имеющий начальную точку, из которой он выходит, и концом точку, в которую он приходит.

Вектор n-мерный – упорядоченный набор $\bar{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из n вещественных чисел называется *n-мерным вектором* $\bar{a}$, а сами числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – *компонентами*, или *координатами вектора* $\bar{a}$.

Векторное пространство R^n – множество всевозможных n-мерных векторов, для которых определены указанным образом операции сложения и умножения на число, называется *n-мерным векторным пространством* и обозначается R^n.

Второй дифференциал функции двух переменных – $d^2f(P_0)=Q(dx; dy)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)dx^2+$ $+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)\,dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)\,dy^2$ называется вторым дифференциалом функции $z=f(P)$ в тсочке P_0.

Гармонический ряд – числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ называемый обобщенным гармоническим рядом (при $\alpha=1$ – гармоническим рядом), сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Геометрическая прогрессия – числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ называемый геометрической прогрессией, абсолютно сходится при $|q|<1$ (в этом случае ряд называется бесконечно убывающей геометрической прогрессией) и расходится при $|q| \ge 1 \quad (a \ne 0)$.

Градиент функции двух переменных – вектор $\nabla f(P_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0); \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right)$ называется градиентом функции $z=f(P)$ в точке P_0.

Дифференциал функции – произведение $f'(x)\cdot\Delta x$ называют дифференциалом функции и обозначают dy или $df(x)$. При этом дифференциал независимой переменной dx совпадает с ее приращением Δ x. Тогда $dy=f'(x)\cdot dx$.

Дифференциальное уравнение – уравнение, содержащее независимую переменную x, неизвестную функцию $y=y(x)$ и ее производные $y'=y'(x)$, $y''=y''(x)$,..., $y^{(n)}=y^{(n)}(x)$: $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$, где F – заданная функция своих аргументов.

Дополнения алгебраические – *алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется число $A_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, где Δ_{ij} – определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}

Задача Коши – из всех решений дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ найти то решение $y=y(x)$, $x\in(a, b)$, которое при заданном значении независимой переменной x_0 принимает заданное значение y_0, т.е. $y(x_0)=y_0$, где заданные вещественные числа x_0, y_0 называются начальными значениями, а условие $y(x_0) = y_0$ называется начальным условием или условием Коши.

Интегральная сумма Римана – пусть на отрезке $[a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ задана функция $y = f(x)$. Точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ разделим отрезок $[a, b]$ на n отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. На каждом из этих отрезков возьмем по одной произвольной точке: $c_1 \in [x_0, x_1]$, $c_2 \in [x_1, x_2], \dots,$ $c_n \in [x_{n-1}, x_n]$. Для каждого отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ (k=1,2,…,n) составим произведение $f(c_k)\Delta_k$ значения функции $f(x)$ в выбранной точке c_k на длину $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ этого отрезка. Сумма всех этих произведений $S_n = f(c_1)\Delta_1 + f(c_2)\Delta_2 + \dots + f(c_n)\Delta_n$ называется интегральной суммой Римана функции $f(x)$.

Интегральная кривая – каждой точке (x, y) области определения уравнения $y' = f(x, y)$ это уравнение ставит в соответствие определенное значение производной y'. Пусть $y = \varphi(x)$, $x \in (a,b)$ есть решение уравнения. Тогда кривая, определяемая уравнением $y = \varphi(x)$, $x \in (a,b)$, называется интегральной кривой дифференциального уравнения.

Интегральный признак – пусть положительный числовой ряд имеет вид: $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} f(n)$, где $f(n)$ есть значение при $x=n$ некоторой функции $f(x)$, определенной при $x \in [n_0, \infty)$. Если функция $f(x)$ непрерывна, положительна и монотонно убывает при $x \in [n_0, \infty)$, то тогда: если сходится несобственный интеграл $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_{n_0}^{A} f(x)$, то сходится и числовой ряд; если расходится несобственный интеграл, то расходится и числовой ряд.

Интегрирование –операция, обратная дифференцированию.

Коллинеарные векторы – векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых.

Координата вектора – величина проекции вектора на ось координат.

Координаты вектора в базисе – стр.101.

Крамера правило – пусть система $A\bar{x} = \bar{b}$ линейных уравнений имеет квадратную матрицу A, определитель Δ которой отличен от нуля. Тогда система $A\bar{x} = \bar{b}$ имеет единственное решение $\bar{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \dots \\ x_n^* \end{pmatrix}$, которое может быть найдено по формулам Крамера $x_1^* = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2^* = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, …, $x_n^* = \frac{\Delta_n}{\Delta}$. Здесь Δ_j (j=1, …, n) – определители матриц, которые получаются из матрицы A заменой в ней j-го столбца на столбец свободных членов.

Кратность корня – если часть корней $x_1, x_2, \dots, x_n$ многочлена $P_n(x)$ совпадает, то многочлен можно представить в виде $P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_l)^{k_l}$, $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$, где k_1 – число одинаковых корней x_1; k_2 – число одинаковых корней x_2; и т.д. Число k_1 называется кратностью корня x_1 число k_2 – кратностью корня x_2, и т.д.

Кронекера-Капелли теорема – для того, чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A этой системы равнялся рангу ее расширенной матрицы $\bar{A}$.

Линейная комбинация векторов – вектор $\bar{b}$ называется *линейной комбинацией* векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$, если существуют такие вещественные числа λ_1, λ_2, …, λ_k, что $\bar{b} = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \dots + \lambda_k\bar{a}_k$.

Числа λ_1, λ_2, …, λ_k называются *коэффициентами* этой линейной комбинации.

Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка – уравнение вида: $a(x)y' + b(x)y = f(x)$, где $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции, причем $a(x)$ не равна тождественно нулю.

Локальный минимум (максимум) функции двух переменных – точка $P_0 = P_0(x_0, y_0) \in M$ называется точкой локального минимума (максимума) функции $z = f(P)$, если существует такое $\delta > 0$, что из условия $P = P(x, y) \in M$, $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ следует, что $f(P_0) \le f(P)$ (соответственно $f(P_0) \ge f(P)$).

Матрица – числовой *матрицей* называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Матрица единичная – квадратная матрица E вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ называется *единичной* матрицей. Она обладает свойством единицы, то есть для любой квадратной матрицы A одинакового с E порядка справедливо $AE=EA=A$.
Матрица квадратная – если матрица имеет одинаковое число строк и столбцов ($m=n$), то она называется *квадратной матрицей порядка n*.
Матрица обратная – пусть A и B – квадратные матрицы одного порядка. Матрица B называется *обратной* к матрице A, если $AB=BA=E$.
Матрица расширенная – матрица $\overline{A}$, полученная из матрицы A системы линейных уравнений добавлением к ней столбца $\overline{b}$ свободных членов, называется *расширенной матрицей* системы
Матрица транспонированная – если в матрице A поменять местами строки и столбцы, то получится матрица A^T, которая называется *транспонированной* к матрице A.
Матрица вторых производных функции двух переменных – $B = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \end{pmatrix}$
Метод Бернулли – процесс отыскания общего решения уравнения $a(x)y'+b(x)y=f(x)$, где $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции.
Множество – это совокупность элементов, объединенных общим (характеристическим) свойством.
Модуль вектора – расстояние между началом вектора и его концом.
Направляющий вектор – ненулевой вектор, лежащий на прямой или параллельный ей.
Необходимое условие экстремума функции двух переменных – если точка P_0 является точкой локального экстремума функции $z=f(P)$ и в ней существуют частные производные первого порядка, то они равны нулю: $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)=0$.
Неопределенный интеграл – совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называют неопределенным интегралом, а операцию интегрирования обозначают в виде $\int f(x)dx$.
Необходимый признак сходимости – если числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ сходится, то тогда $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
Непрерывность функции двух переменных – функция $z=f(P)$ называется непрерывной в точке P_0, если выполнены следующие три условия: функция $f(P)$ определена в точке P_0; существует $\lim_{P\to P_0} f(P)$; $\lim_{P\to P_0} f(P)$ =(P_0).Функция $z=f(P)$ называется непрерывной в области, если она непрерывна в каждой точке этой области.
Непрерывность функции – функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x=x_0$, если она в этой точке и в окрестности точки определена и $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.
Нормаль – ненулевой вектор, перпендикулярный прямой на плоскости Oxy или плоскости в пространстве Oxyz.
Область определения функции – множество значений аргумента x, для которых существуют значения функции y, называется областью определения функции (или областью существования функции).
Однородное линейное дифференциальное уравнение – уравнение вида: $y''+py'+qy=0$, где p, q – заданные вещественные числа.
Определенный интеграл – если при стремлении наибольшей из длин Δ_k ($k=1, 2, \dots, n$) к нулю (а значит числа n отрезков Δ_i – к бесконечности) существует конечный предел последовательности интегральных сумм Римана функции $f(x)$, который не зависит от выбора точек $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, c_1, c_2, \dots, c_n$, то этот предел называется *определенным интегралом функции* $f(x)$ *от a до b и обозначается* $\int_a^b f(x)dx$. При этом функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$.
Ортогональные векторы – векторы, угол между которыми равен 90^{O}.

Первый дифференциал функции двух переменных – линейная часть $df(P_0)$ приращения $f(P)$–$f(P_0)$ называется первым дифференциалом функции $z=f(P)$ в точке P_0. Таким образом, формула первого дифференциала имеет вид: $df(P_0)=L(dx;\,dy)=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)dy$.

Перегиб графика функции – пусть кривая определяется уравнением $y=f(x)$. Если $f''(a)=0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x=a$ из области определения функции производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $x=a$ есть точка перегиба.

Подынтегральная функция – если под $F(x)$ понимать неопределенный интеграл (т.е. совокупность всех первообразных), то $F(x)\equiv\int f(x)dx=\Phi(x)+C$, где $f(x)$ – называют *подынтегральной функцией*, а x – *переменной интегрирования.*

Порядок уравнения – наивысший порядок производной, входящей в уравнение $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$, называется порядком дифференциального уравнения.

Последовательность числовая – если каждому натуральному числу $n \in N$ поставлено в соответствие некоторое действительное число, то совокупность чисел $\{a_n\}$, $n = 1;2;\ldots$ называется числовой последовательностью.

Предел функции – пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором множестве X, для точек которого определено понятие $x \to a$. Функция $y=f(x)$ имеет конечный *предел* b ($y \to b$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta_\varepsilon > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta_\varepsilon$ выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. Если b есть *предел функции* $f(x)$ при $x \to a$, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

Предел функции двух переменных – число A называется пределом функции $z=f(x, y)$ при стремлении точки $P(x, y)$ к точке $P_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что из условия $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ вытекает неравенство $|f(x, y)–A<\varepsilon$. При этом пишут $A=\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$.

Предел числовой последовательности – число A называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такой номер n_ε, что для всех номеров $n>n_\varepsilon$ выполняется условие $|a_n-A|<\varepsilon$. При этом записывают $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$

Признак Даламбера – пусть $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ – положительный числовой ряд. И пусть существует предел: $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$, тогда если $\lambda<1$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ сходится; если $\lambda>1$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ расходится. Пусть $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ – положительный числовой ряд. И пусть существует предел: $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$,тогда если $\lambda<1$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ сходится; если $\lambda>1$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ расходится.

Признак Коши – пусть $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ – положительный числовой ряд. И пусть существует предел $k=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$. Тогда: если $k<1$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ сходится; если $k>1$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ расходится.

Признак Лейбница – пусть $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n a_n$ – знакочередующийся числовой ряд. Если выполнены условия: $|a_{n+1}|\le|a_n|$ для всех $n\ge n_0$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, то тогда ряд сходится. Причем сумма ряда имеет знак первого члена ряда (т.е. знак члена a_0) и справедливо неравенство $\left|\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n a_n\right|\le|a_{n_0}|$.

Производная функции – производной данной функции $y=f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда последнее произвольным образом стремится к нулю.
Прямоугольная декартова система координат – совокупность двух (на плоскости Oxy) или трех (в пространстве $Oxyz$) взаимно перпендикулярных осей с общим началом и общей единицей масштаба.
Равные векторы – коллинеарные векторы, имеющие одинаковую длину и одинаковое направление.
Разделяющиеся переменные – уравнение вида: $y'=f(x)g(y)$, где $f(x)$, $g(y)$ – заданные функции своих аргументов.
Ранг матрицы – *рангом матрицы по строкам* называется ранг системы ее векторов-строк, то есть максимальное количество ее линейно независимых строк. *Рангом матрицы по столбцам* называется ранг системы ее векторов-столбцов, то есть максимальное количество ее линейно независимых столбцов.
Ранг системы векторов –количество векторов в каком-либо базисе этой системы векторов.

Ряд Маклорена – степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ называется *рядом Маклорена* для функции $f(x)$.

Система векторов линейно зависимая – система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ называется *линейно зависимой*, если существует линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, в которой хотя бы один коэффициент отличен от нуля.

Система векторов линейно независимая – система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ называется *линейно независимой*, если нулевую линейную комбинацию этих векторов можно получить *только* при нулевых значениях *всех* коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Система линейных уравнений – система уравнений вида $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$ называется *системой линейных уравнений*. Здесь $x_1, \ldots, x_n$ – неизвестные, $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ – заданные коэффициенты при неизвестных, $b_1, \ldots, b_m$ – заданные свободные члены.
Система уравнений неоднородная – если в столбце свободных членов есть хотя бы один ненулевой элемент, система называется *неоднородной*.
Система уравнений несовместная – если система уравнений не имеет ни одного решения, она называется *несовместной*.
Система уравнений однородная – система уравнений называется *однородной*, если в столбце свободных членов все элементы нулевые.
Система уравнений совместная – система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.
Скалярное произведение – произведение модулей векторов на косинус угла между ними.

Степенной ряд – *степенным рядом* называется ряд вида $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n x^n$, где $\{a_n\}_{n\ge n_0}$ – последовательность вещественных чисел, а x – независимая вещественная переменная.
Схема исследования функции – при исследовании функции рекомендуется придерживаться следующего плана:

1. Нахождение области определения функции.
2. Исследование поведения функции на концах области определения. Вертикальные асимптоты. Наклонные асимптоты.
3. Четность функции.
4. Периодичность функции.
5. Исследование функции на монотонность и экстремум.
6. Исследование функции на выпуклость и вогнутость, точки перегиба.
7. Нахождение точек пересечения графика с осями координат.
8. Поиск дополнительных точек графика.
9. Построение графика.

Сходимость – пусть $\sum_{n=n_0}^{\infty}u_n$ – числовой ряд. Если существует конечный предел $S=\lim_{n\to\infty}S_n$ частичных сумм, то числовой ряд называется *сходящимся*, а число S – его *суммой*. В противном случае говориться, что ряд *расходится*.

Сходящийся несобственный интеграл – несобственный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ определяется равенством $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; если же предел не существует или равен бесконечности, – *расходящимся*.
Таблица производных функции –

Арифметические свойства производных	Производные основных элементарных функций	Производные для сложных функций $u = u(x)$
V. $(C\cdot u)' = C\cdot u'$ VI. $(u+v)' = u'+v'$ VII. $(u\cdot v)' = u'v+uv'$ VIII. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	12. $(x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$ 13. $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$ $(e^x)' = e^x$ 14. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\cdot\ln a}$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ 15. $(\sin x)' = \cos x$ 16. $(\cos x)' = -\sin x$ 17. $(tg\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ 18. $(ctg\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ 19. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 20. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 21. $(arctg\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ 22. $(arcctg\,x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	12. $(u^\alpha)' = \alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$ 13. $(a^u)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$ $(e^u)' = e^u\cdot u'$ 14. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$ $(\ln u)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'$ 15. $(\sin u)' = \cos u\cdot u'$ 16. $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$ 17. $(tg\,u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$ 18. $(ctg\,u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$ 19. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$ 20. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$ 21. $(arctg\,u)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$ 22. $(arcctg\,u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Табличные интегралы –

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1) \qquad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| = C \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$ $\qquad\qquad$ $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

Угол между векторами – наименьший угол между векторами, равными данным, если их начала совмещены.

Условная сходимость – числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ называется :*условно сходящимся*, если числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ сходится, а числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Формула интегрирования по частям – пусть *u* и *v* – какие-то заданные функции *x*, а *du* и dv – их дифференциалы. Существует следующее соотношение: $\int udv = uv - \int vdu$. Соотношение называют *формулой интегрирования по частям*.

Формула Ньютона-Лейбница – пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a\,,b]$. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(c\,,d) \supset [a\,,b]$ (т.е. $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (c\,,d)$), тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b$ Формула называется *формулой Ньютона-Лейбница.*

Функция – если каждому значению переменной *x*, принадлежащему некоторому множеству вещественных чисел, соответствует единственное вещественное значение другой переменной *y*, то *y* есть *функция* от *x* или, в символической записи, $y = f(x)$, $\quad y = \varphi(x)$ и т.п.

Функция двух переменных – пусть *D* – произвольное множество точек плоскости $R^2 = \{(x, y)\colon x \in R, y \in R\}$. Если каждой точке $P=P(x, y) \in D$ поставить в соответствие некоторое вполне определенное вещественное число $z=f(P)=f(x, y)$, то говорят, что на множестве *D* задана числовая функция *f* двух вещественных переменных *x* и *y*. Множество *D* при этом называется областью определения, а множество $E=\{z \in R\colon z=f(P), P=P(x, y) \in D\}$ – областью значений функции $z=f(P)$.

Частная производная функции двух переменных – частной производной функции $z=f(P)$=f(*x*, *y*) по переменной *x* в точке $P_0=P_0(x_0, y_0) \in$ M называется предел $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$, а частной производной этой функции по переменной *y* в точке $P_0(x_0, y_0)$ называется предел $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$, если указанные пределы существуют.

Числовой ряд – ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ называется числовым рядом, если $\{u_n\}_{n \ge n_0}$ – последовательность вещественных чисел.

Экстремум функции – функция $f(x)$ имеет *максимум* в точке $x = x_1$, если $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ при любых Δx, достаточно малых по абсолютной величине. Функция $f(x)$ имеет *минимум* в точке $x = x_1$, если $f(x_1 + \Delta x) > f(x_1)$ при любых Δx, достаточно малых по абсолютной величине. Точки x_1 называются *точками локального максимума* и *минимума* соответственно. Общее название – *точки экстремума функции.*

Экстремум функции двух переменных – точки локального минимума и локального максимума функции $z=f(P)$ принято называть точками локального экстремума или, проще, точками экстремума.

Элементарные преобразования системы уравнений – *элементарными преобразованиями* системы уравнений называются следующие преобразования: перестановка уравнений; изменение порядка следования переменных одинаково во всех уравнениях системы; умножение какого-либо уравнения на отличное от нуля число; замена какого-либо уравнения системы на его сумму с другим уравнением, предварительно умноженным на произвольное число.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс для студентов заочной формы обучения

Второе издание

Издается в авторской редакции

Оператор-верстальщик *Т.С. Сафронова*

Подписано в печать 23.06.2005 г. Формат 60x84/8 Тираж 850 экз.
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 20,5.

Новосибирский государственный университет экономики и управления
630099, г. Новосибирск, ул. Каменская, 56.